무작위 과정을 분석하는
미분 방정식 방법
(Differential Equation Method
for analysing the evolution of random processes)

소프트웨어 무결점 센터 제5회 워크샵
(5th ROSAEC WORKSHOP)
2011

김 보영
카이스트 전산학과
응용알고리즘연구실
(AALAB KAIST)

목차

- **배경 지식**
  - 기본 개념: 무작위 과정, 무작위 그래프
  - 독립성 → 미분 방정식 방법의 필요성

- **미분 방정식 방법의 기본 발상**

- **예제를 통해 이해하는 미분 방정식 방법**
  예제: *2-과정(The 2-process)*
  - 적절한 확률 변수 시스템 고르기
  - 한 단계 변화의 기대값 구하기
  - 한 단계 변화에 대응하는 미분 방정식 구하기
  - 아즈마-호이프딩 부등식을 이용한 집중 현상 증명

- **기타 예제**
- **정리**

미분 방정식 방법의 배경 지식

무작위 과정(Random process)과 무작위 그래프(Random graph)란?

- **무작위 과정**(Random process): 확률 변수들의 모임. $\{X_1, X_2, \ldots\}$

- **무작위 그래프**(Random graph): 무작위 과정(Random process)에 의해 생성되는 그래프

무작위 과정(Random process)과 무작위 그래프(Random graph)란?

- **무작위 과정**(Random process): 확률 변수들의 모임. $\{X_1, X_2, \dots\}$

  (예) X_i = 1 with 확률 p

  0 with 확률 1-p

  → 매 시간마다 확률 p로 앞면이 나올 동전 던지기

- **무작위 그래프**(Random graph): 무작위 과정(Random process)에 의해 생성되는 그래프

무작위 과정(Random process)과 무작위 그래프(Random graph)란?

- **무작위 과정**(Random process): 확률 변수들의 모임. $\{X_1, X_2, \ldots\}$

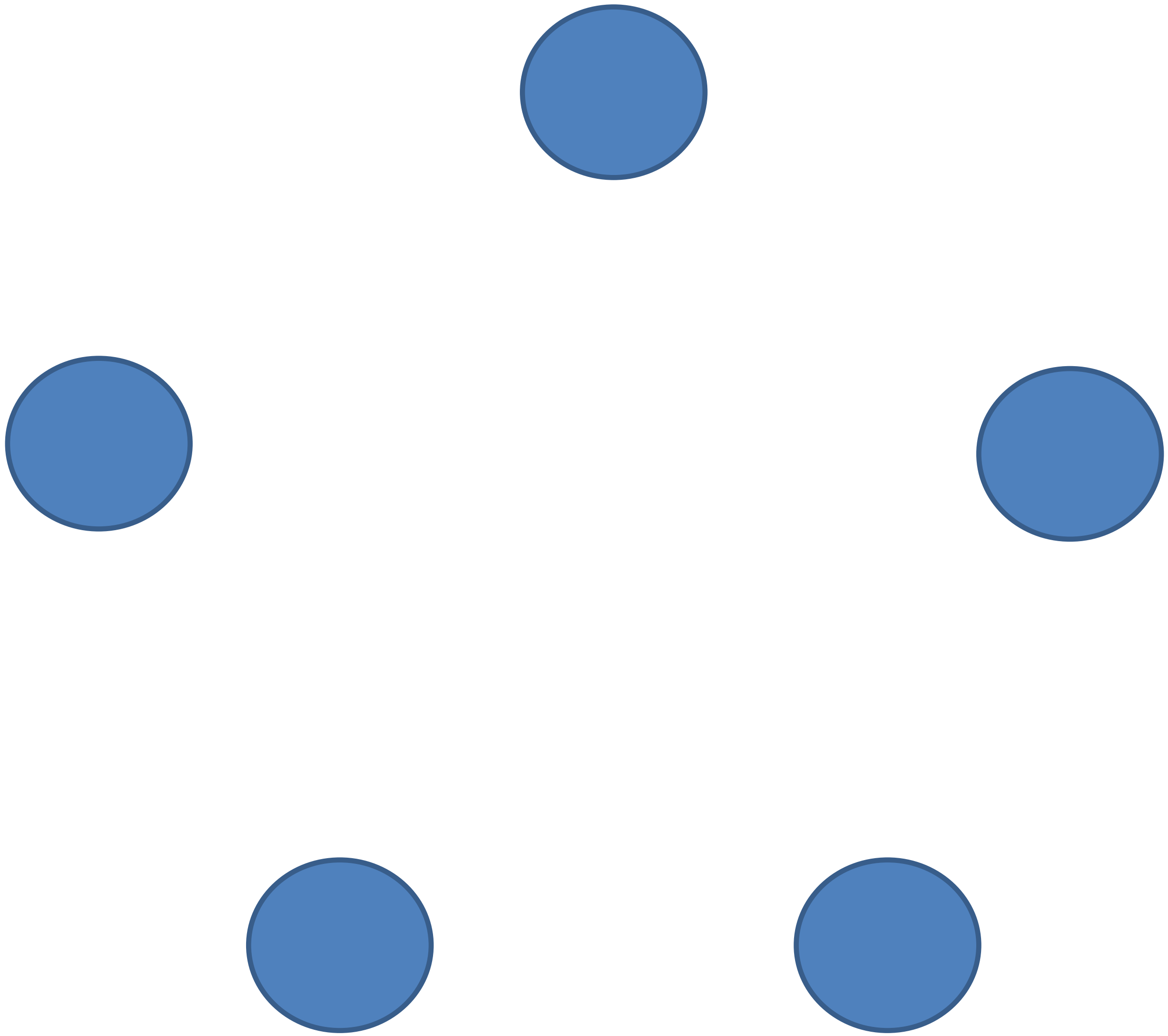
  (예) X_i = 1 with 확률 p
  0 with 확률 1-p
  → 매 시간마다 확률 p로 앞면이 나올 동전 던지기

- **무작위 그래프**(Random graph): 무작위 과정(Random process)에 의해 생성되는 그래프

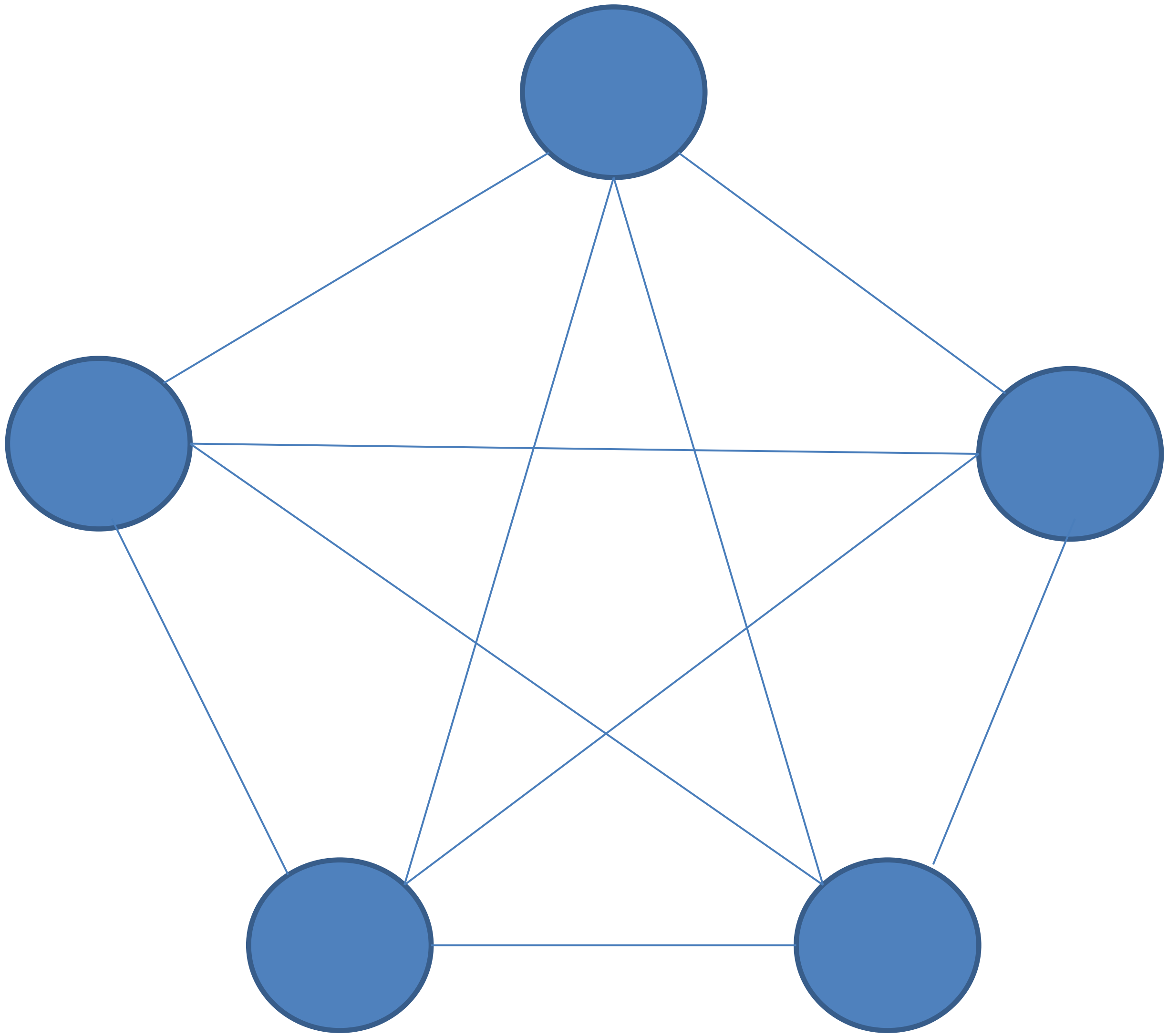
  (예) 1. $G_{n,p}$: {1, 2, … , n}의 n개 점이 있을 때, 각 두 점 사이가 선분으로 연결될 확률이 p인 그래프

  2. 특정한 그래프 H를 만들지 않는 과정(H-free process)을 이용해 얻어지는 그래프: H=Δ이면?

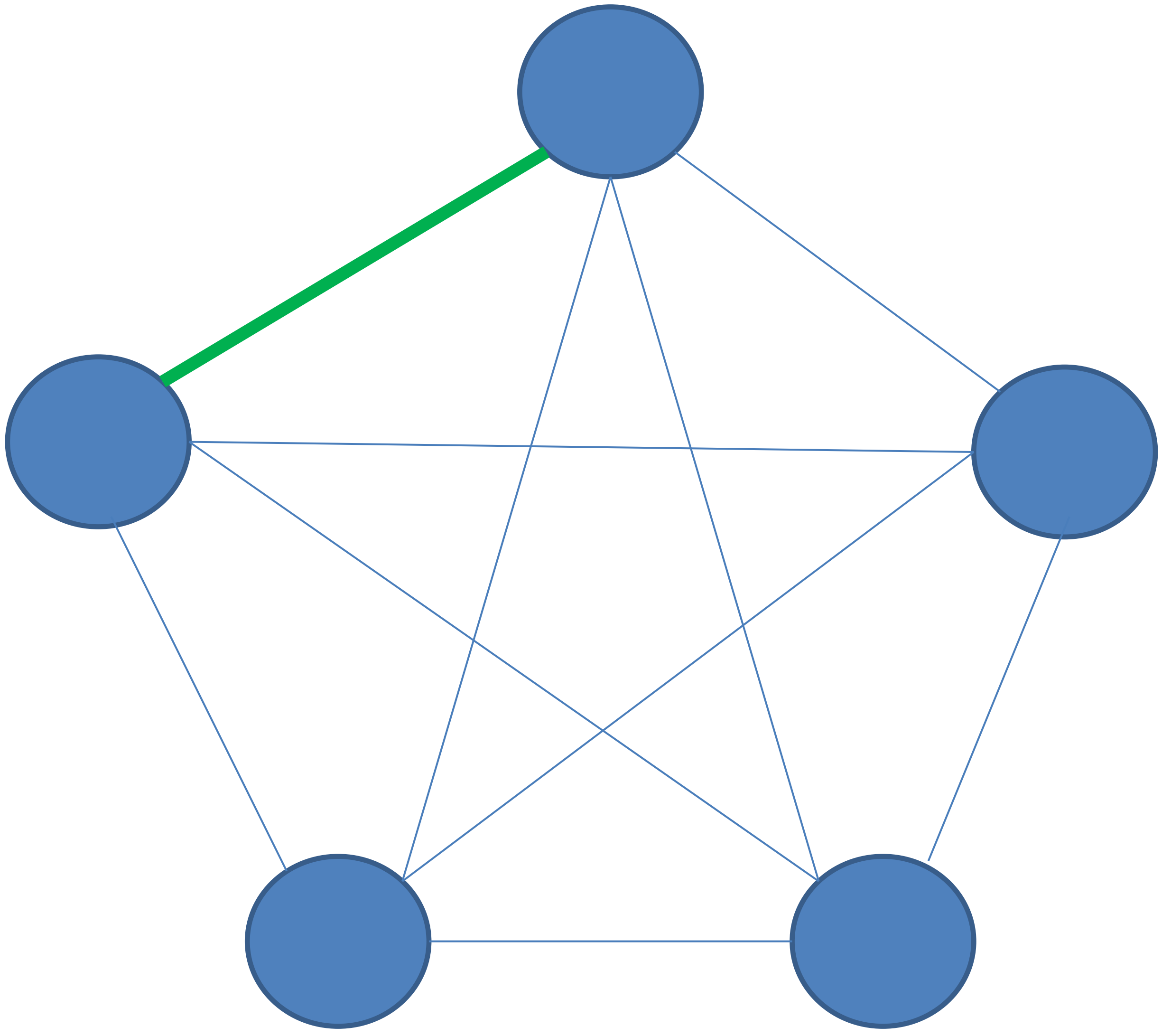
△를 만들지 않는 과정(△-free process for n=5)



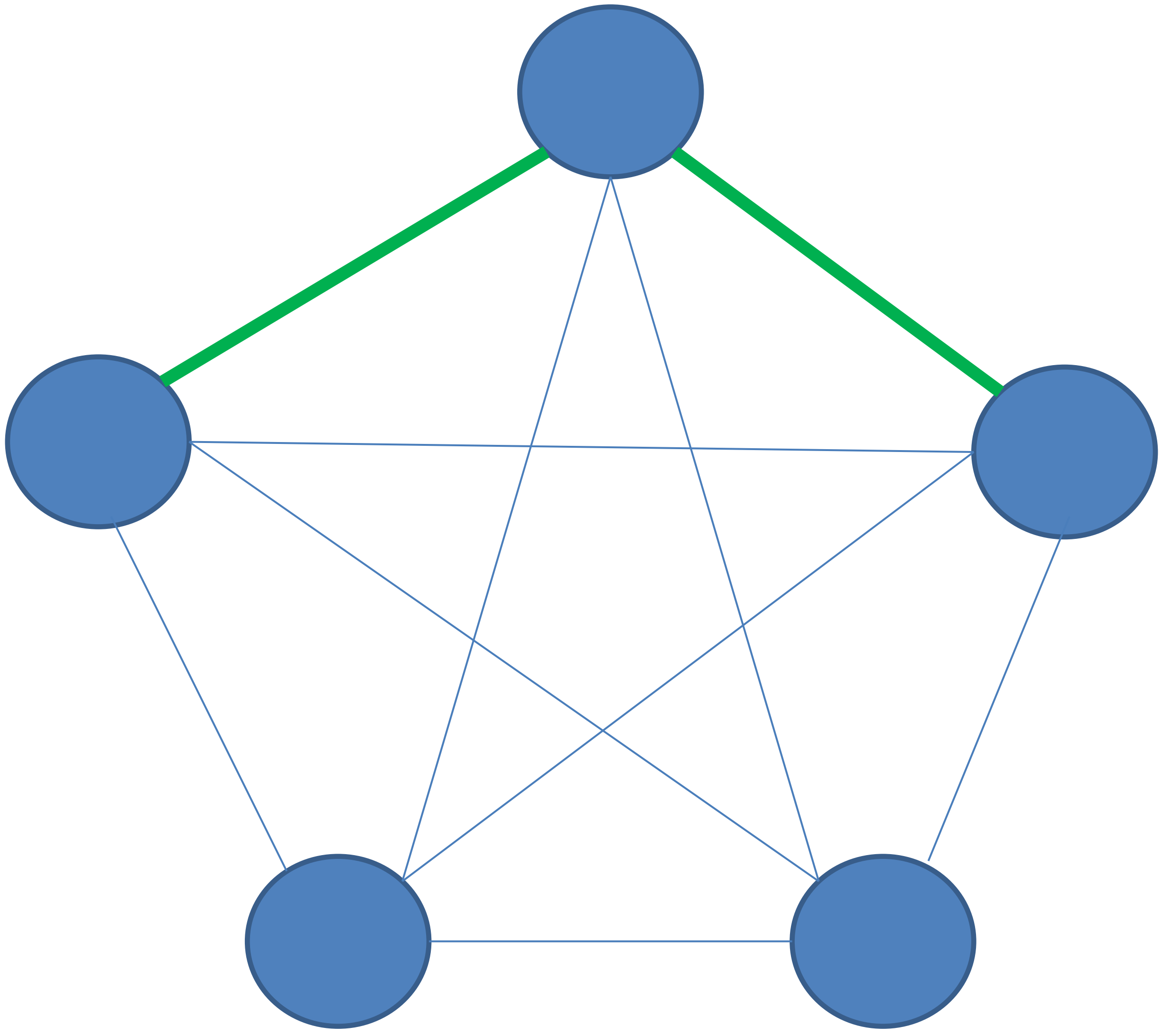
△를 만들지 않는 과정(△-free process for n=5)



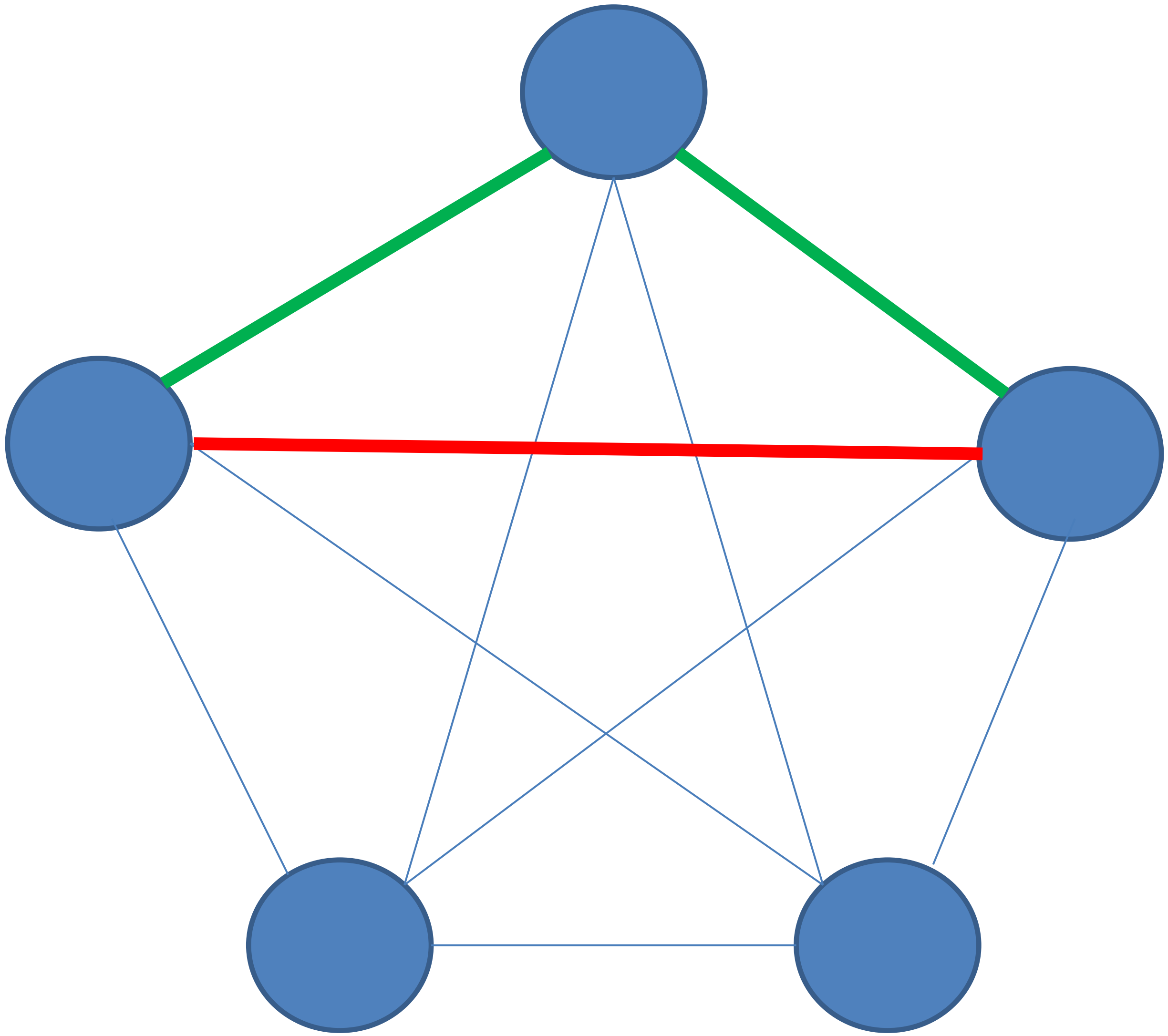
△를 만들지 않는 과정(△-free process for n=5)



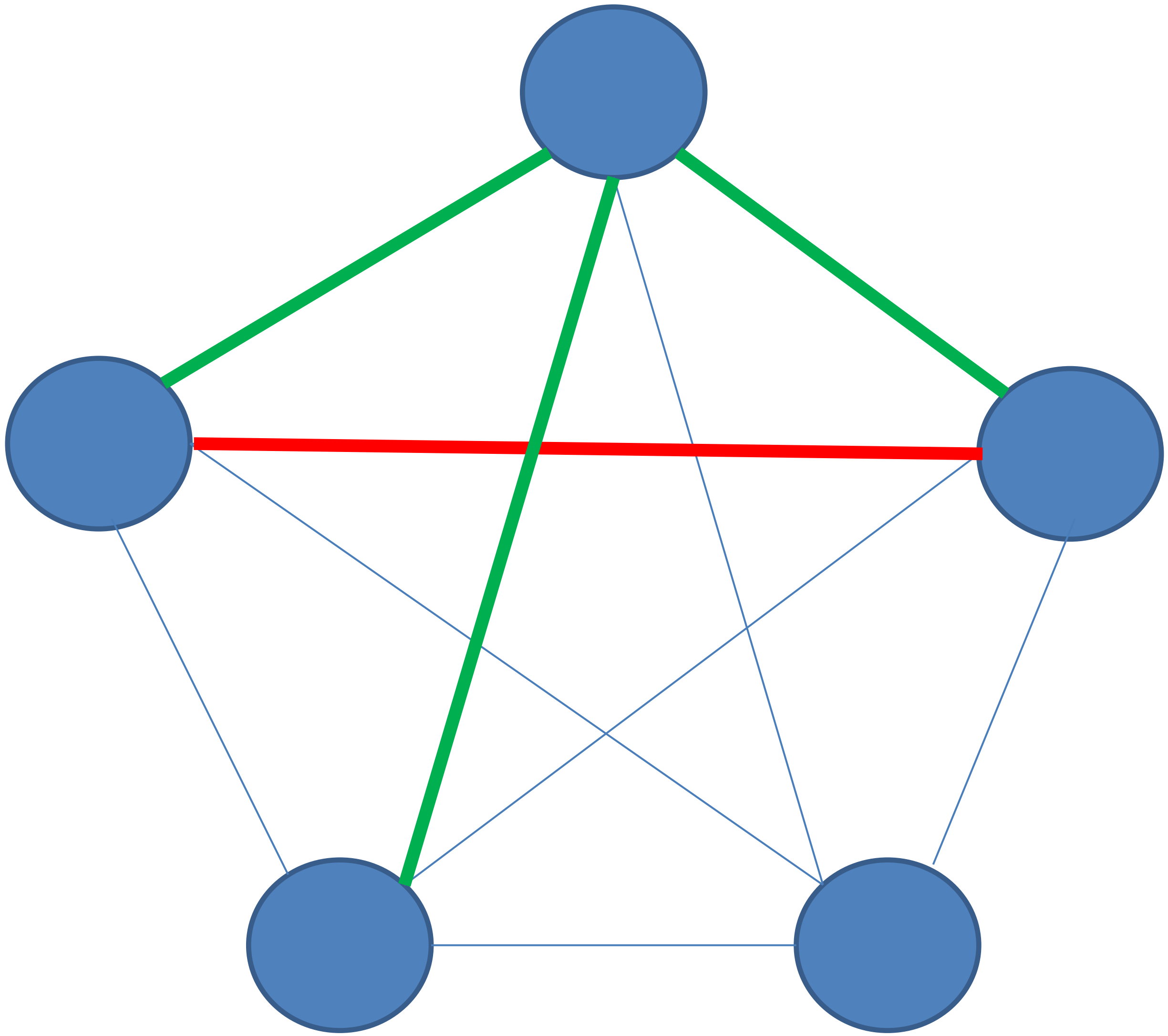
△를 만들지 않는 과정(△-free process for n=5)



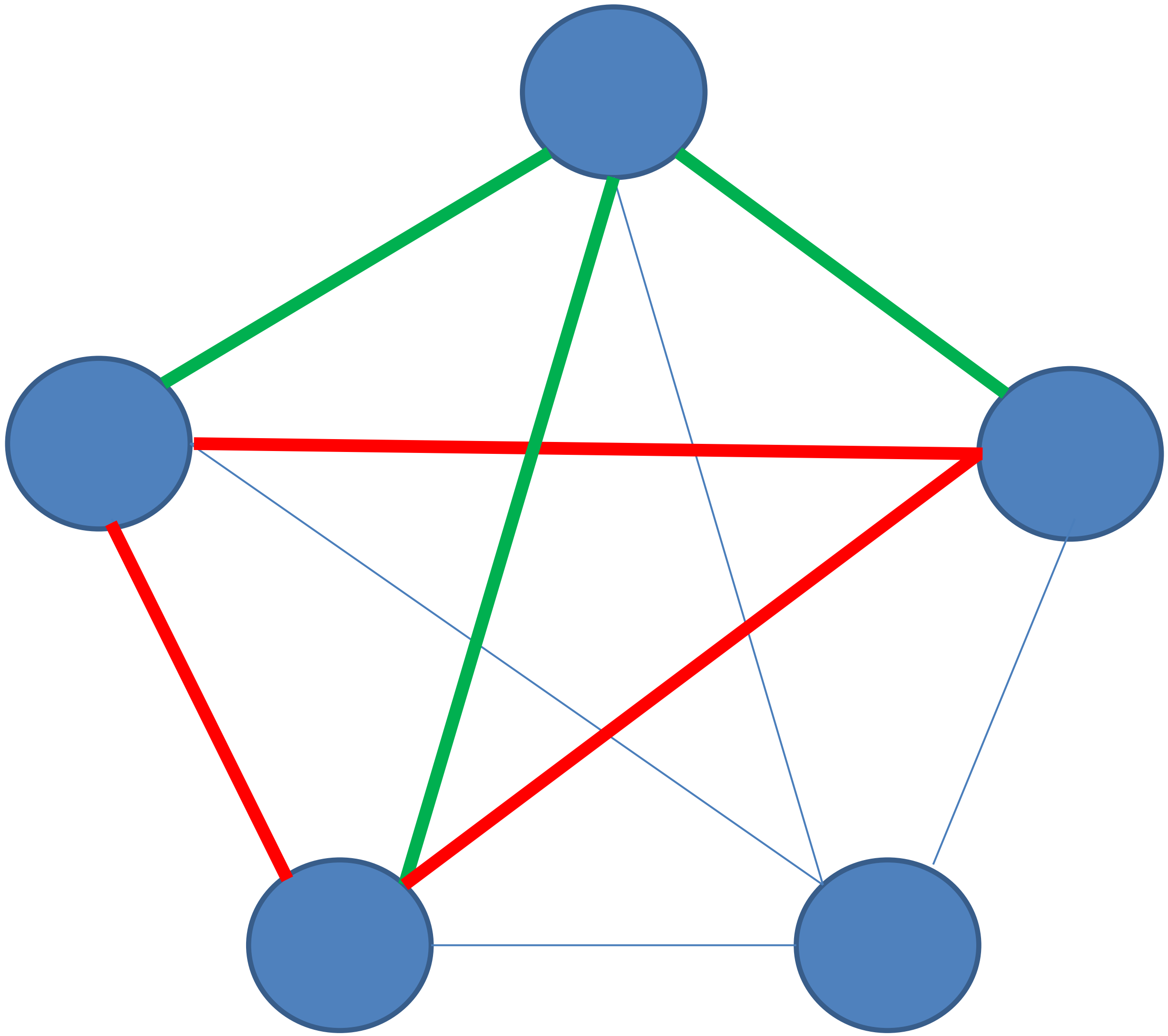
△를 만들지 않는 과정(△-free process for n=5)



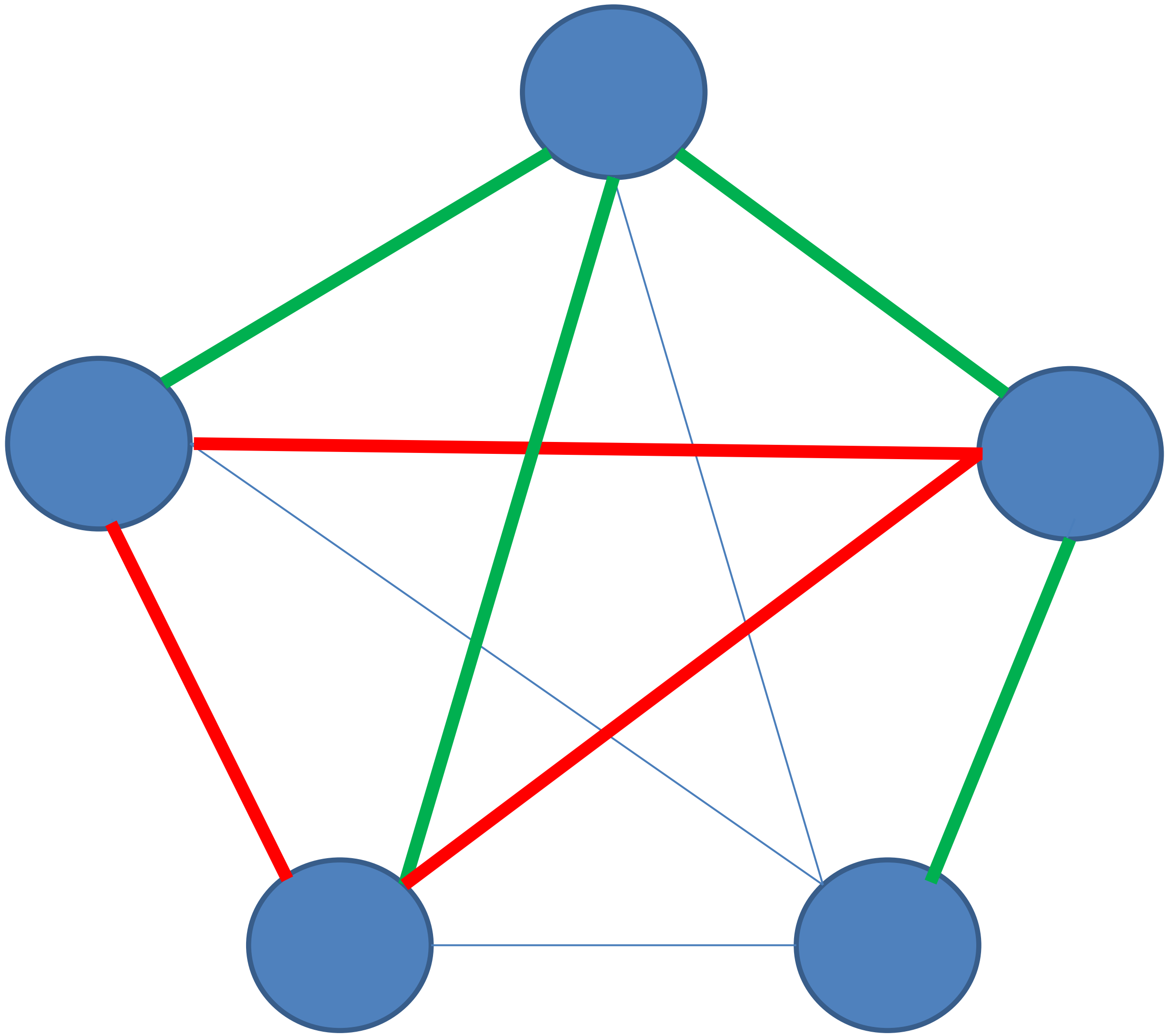
△를 만들지 않는 과정(△-free process for n=5)



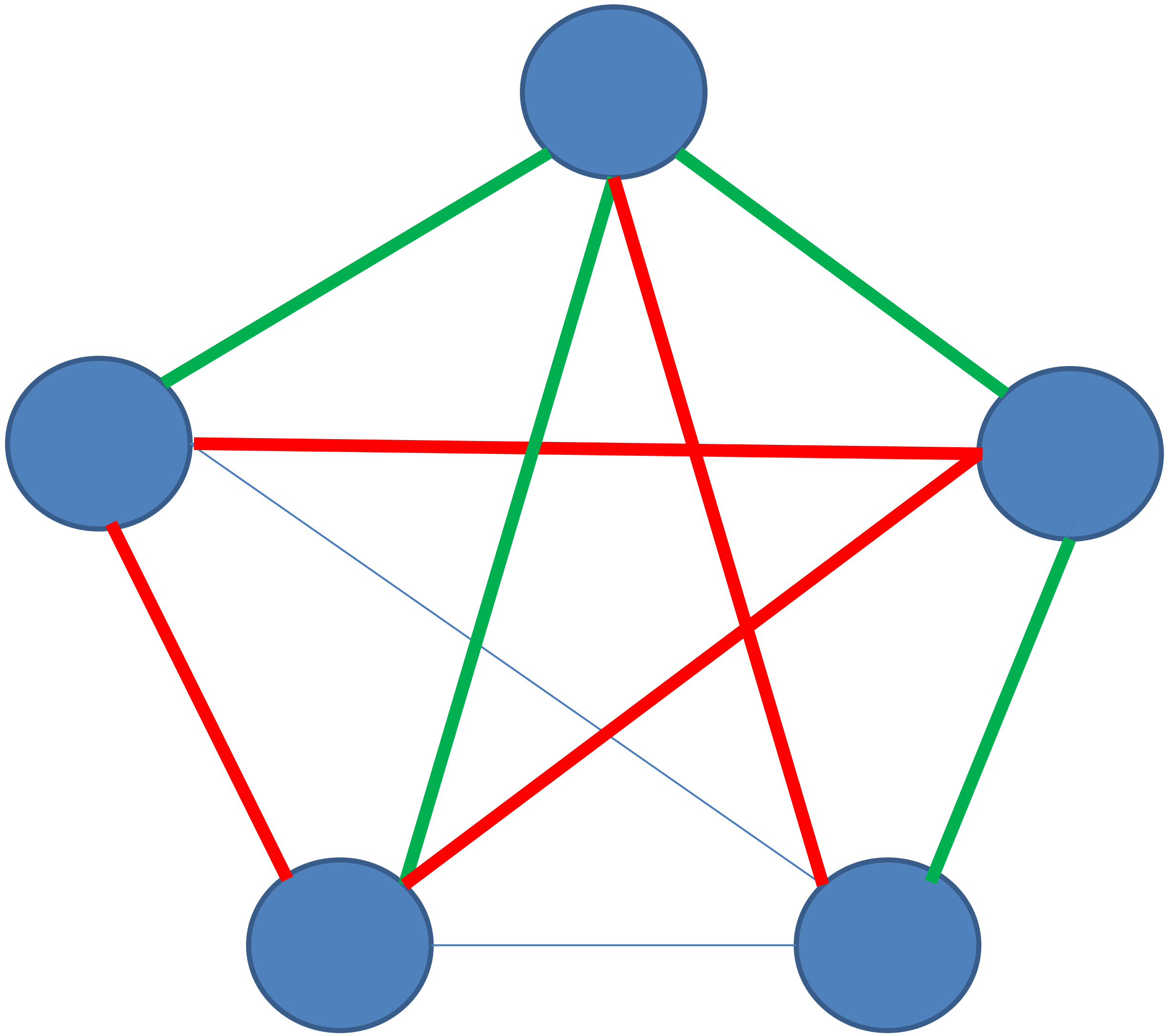
△를 만들지 않는 과정(△-free process for n=5)



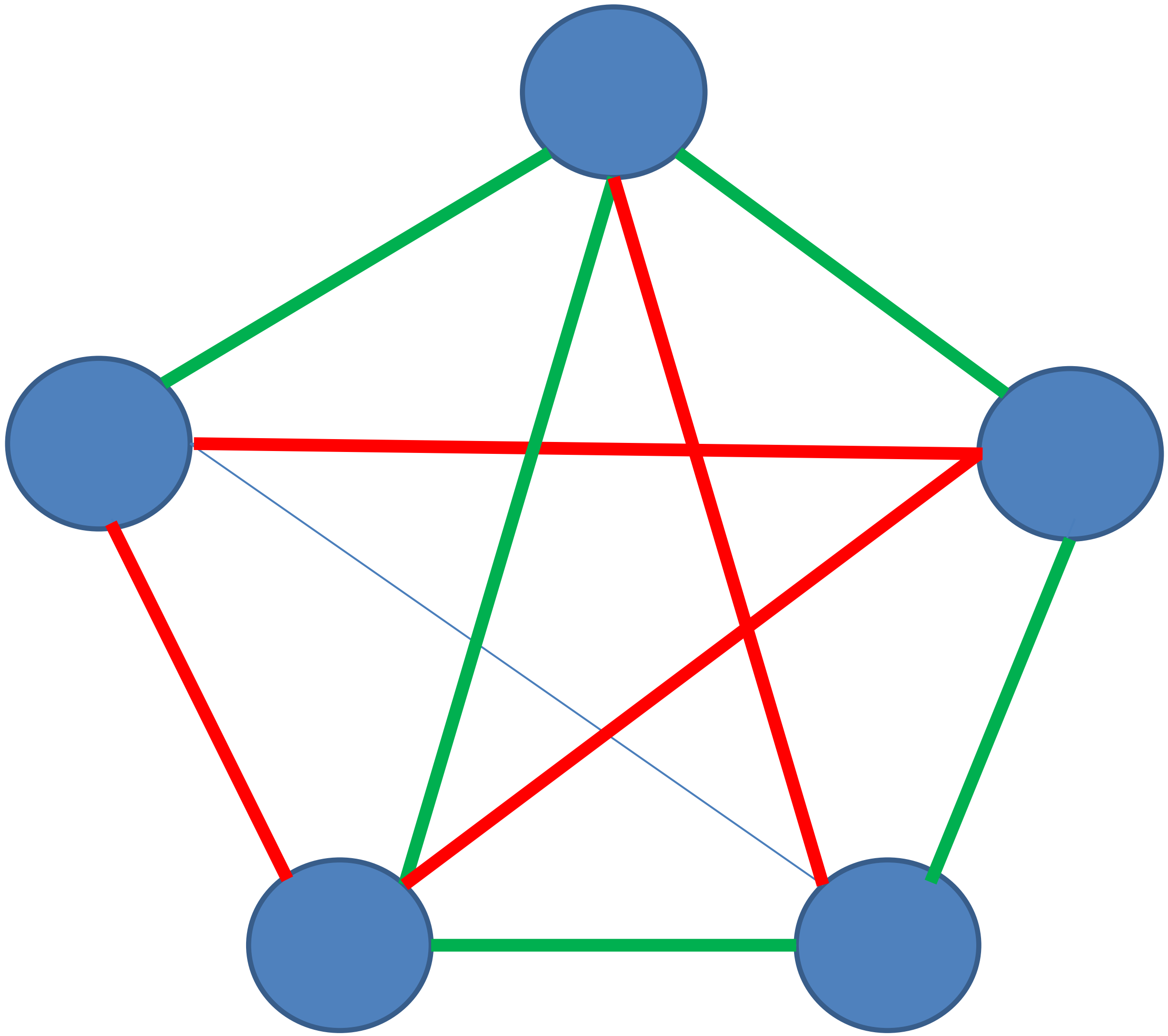
△를 만들지 않는 과정(△-free process for n=5)



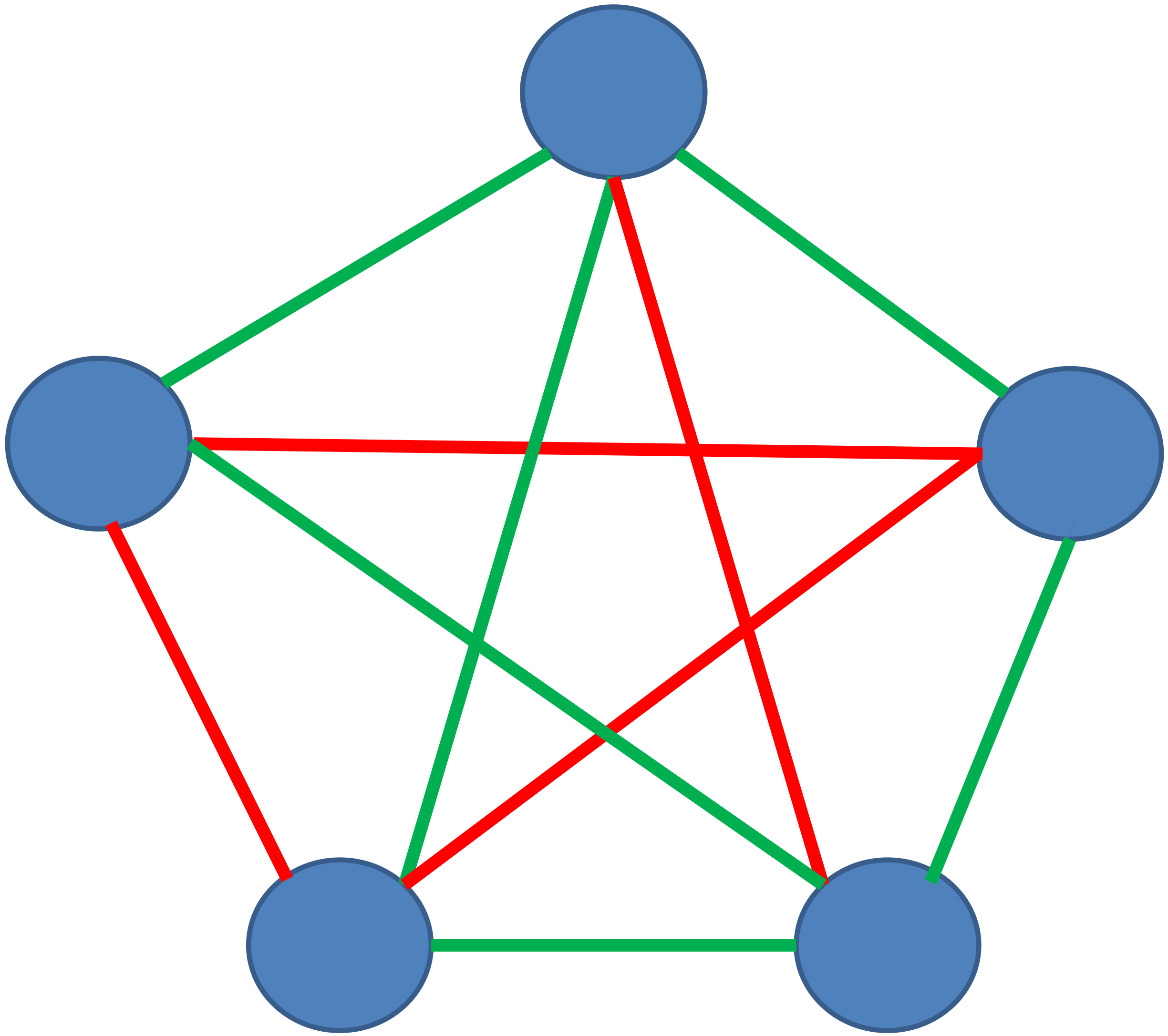
△를 만들지 않는 과정(△-free process for n=5)



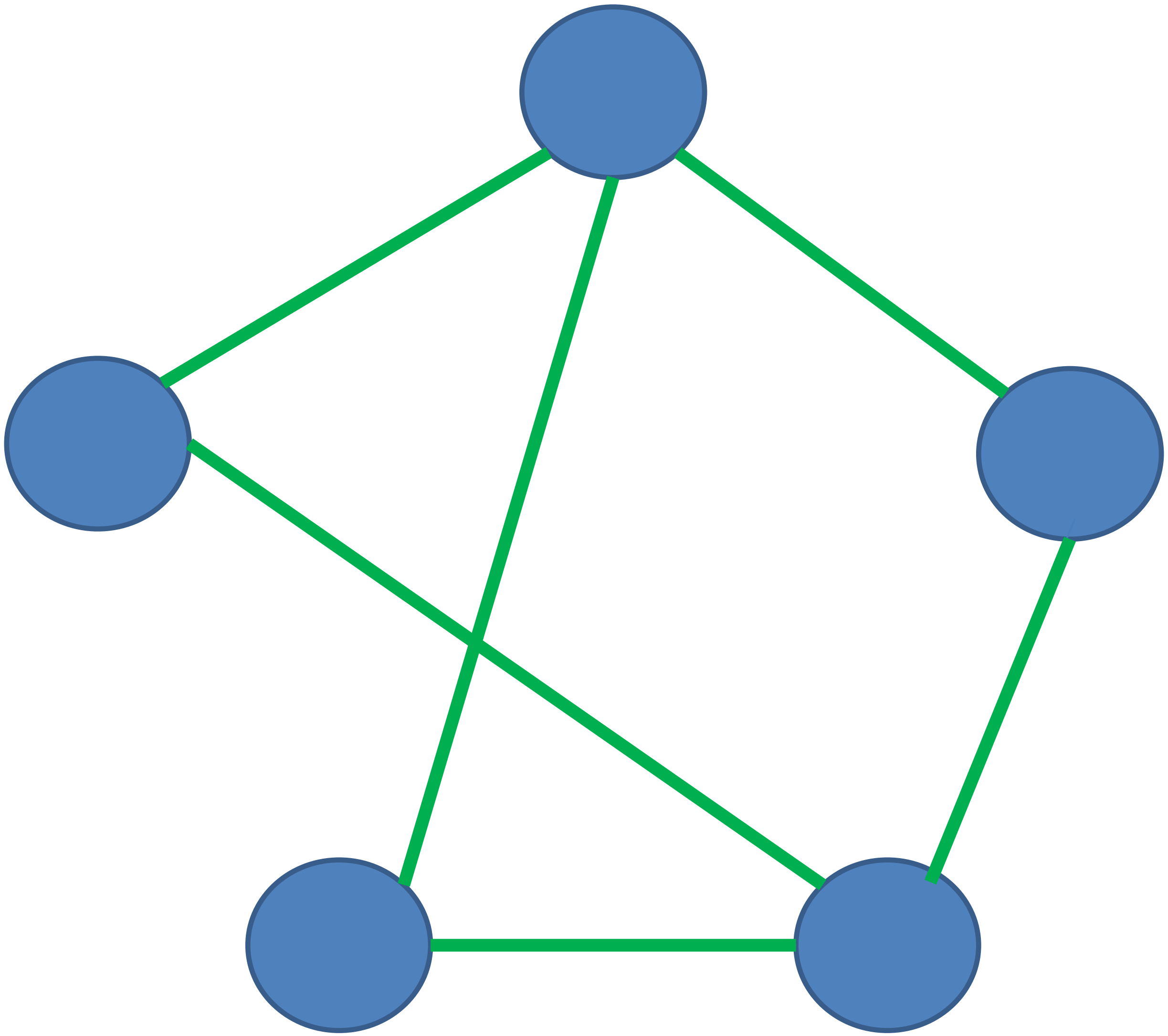
△를 만들지 않는 과정(△-free process for n=5)



△를 만들지 않는 과정(△-free process for n=5)



△를 만들지 않는 과정(△-free process for n=5)



무작위 과정(Random process)의 독립 여부

- 그래프가 진화하는 동안 어느 시점에 이르러 어떤 특정한 성질을 갖게 될까?
- **독립성(Independency)**

무작위 과정(Random process)의 독립 여부

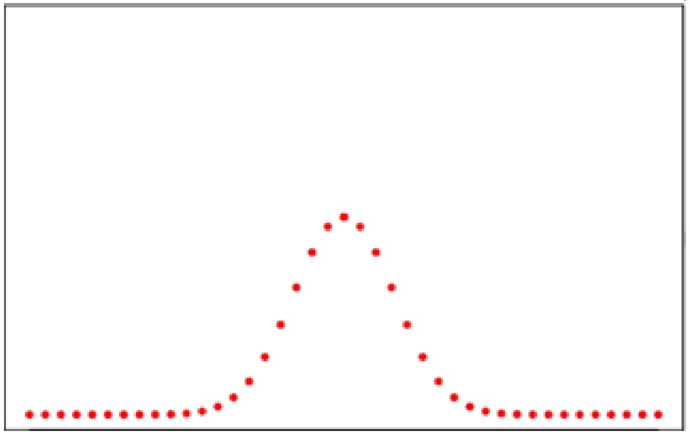
- 그래프가 진화하는 동안 어느 시점에 이르러 어떤 특정한 성질을 갖게 될까?
- **독립성(Independency)**

  독립 → **체르노프 부등식(Chernoff bound)**

체르노프 부등식(Chernoff Bound)

◎ **체르노프 부등식**: $X_1, \ldots X_n$이 $P[X_i=1]=p_i$인 푸아송 시행을 따르고 서로 독립일 때, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 이고 $\mu = E[X]$라 하자.

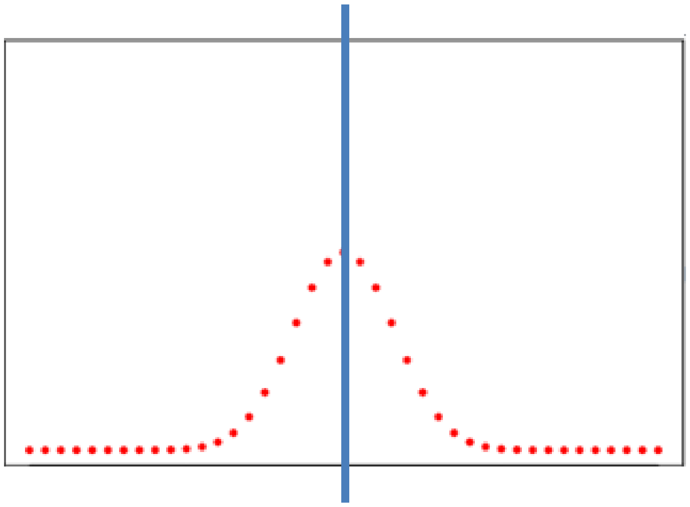
모든 $0<\delta\le 1$에 대하여, $\Pr[|X-\mu| \ge \delta\mu] \le 2e^{-\mu\delta^2/3}$



체르노프 부등식(Chernoff Bound)

◎ **체르노프 부등식**: $X_1, \ldots X_n$이 $P[X_i=1]=p_i$인 푸아송 시행을 따르고 서로 독립일 때, $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$ 이고 $\mu = E[X]$라 하자.

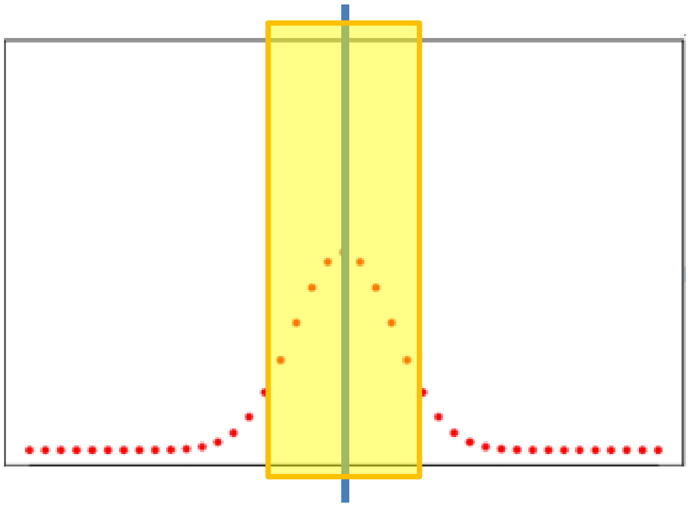
모든 $0<\delta\leq 1$에 대하여, $\Pr[|X-\mu| \geq \delta\mu] \leq 2e^{-\mu\delta^2/3}$



체르노프 부등식(Chernoff Bound)

◎ **체르노프 부등식**: $X_1, \ldots X_n$이 $P[X_i=1]=p_i$인 푸아송 시행을 따르고 서로 독립일 때, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$이고 $\mu = E[X]$라 하자.

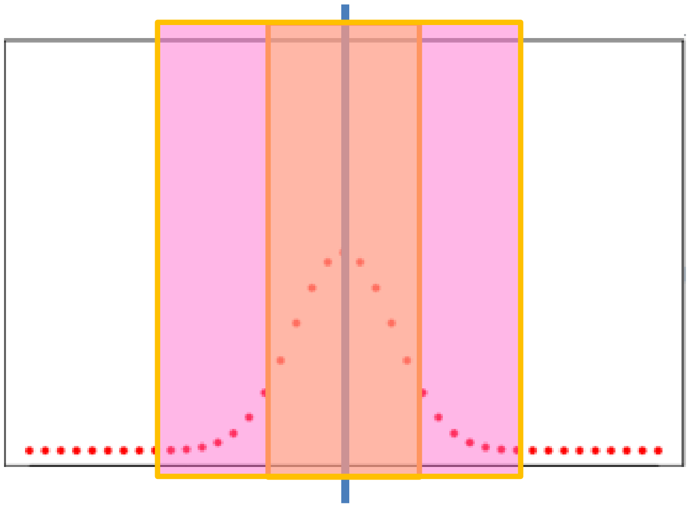
모든 $0<\delta\le1$에 대하여, $\Pr[|X-\mu| \ge \delta\mu] \le 2e^{-\mu\delta^2/3}$



체르노프 부등식(Chernoff Bound)

◎ **체르노프 부등식**: $X_1, \ldots, X_n$이 $P[X_i=1]=p_i$인 푸아송 시행을 따르고 서로 독립일 때, $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$이고 $\mu=E[X]$라 하자.

모든 $0<\delta\le 1$에 대하여, $\Pr[|X-\mu| \ge \delta\mu] \le 2e^{-\mu\delta^2/3}$



체르노프 부등식(Chernoff Bound)

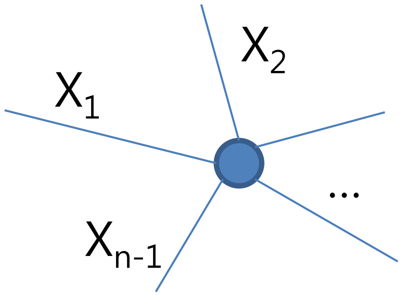
◎ **체르노프 부등식**: $X_1, \ldots, X_n$이 $P[X_i=1]=p_i$인 푸아송 시행을 따르고 서로 독립일 때, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 이고 $\mu = E[X]$라 하자.

모든 $0<\delta\leq 1$에 대하여, $\Pr[|X-\mu| \geq \delta\mu] \leq 2e^{-\mu\delta^2/3}$

(예) 체르노프 부등식의 사용 ($G_{n,p}$)

$$\sum_i X_i = d(v) \quad E[X] = p(n-1)$$

→ d(v) ~ pn (p>>(logn)/n)



미분 방정식 방법의 필요성

- 많은 무작위 과정의 경우 독립성이 보장되지 않음

미분 방정식 방법의 필요성

- 많은 무작위 과정의 경우 독립성이 보장되지 않음

→ 알고리즘과, 그로 인해 얻어지는 무작위 그래프의 성질을 이해 불가

미분 방정식 방법의 필요성

- 많은 무작위 과정의 경우 독립성이 보장되지 지 않음

→ 알고리즘과, 그로 인해 얻어지는 무작위 그래프의 성질을 이해 불가

→ 어떻게 해결해야 하는가?

미분 방정식 방법의 필요성

- 많은 무작위 과정의 경우 독립성이 보장되지 않음

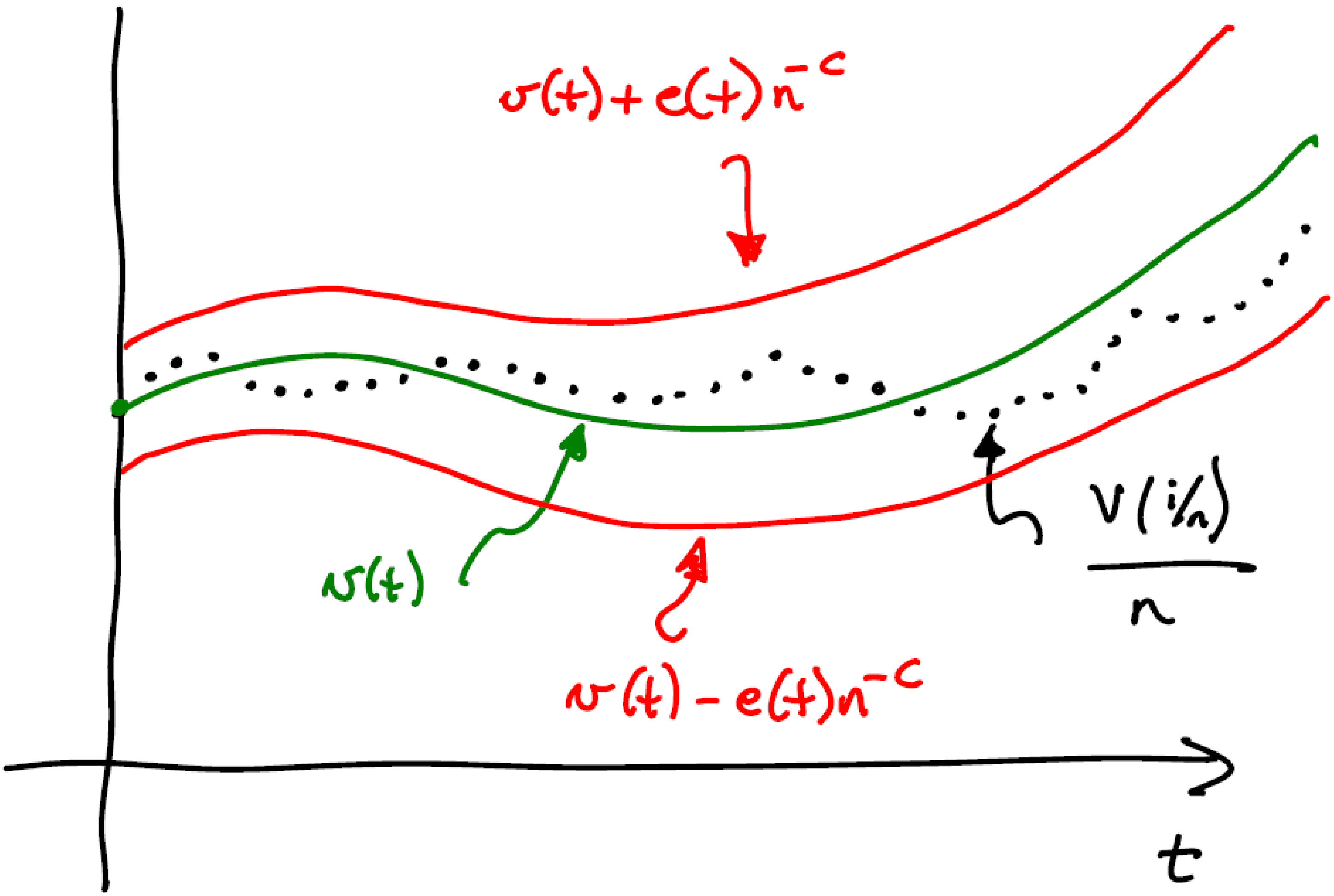
→ 알고리즘과, 그로 인해 얻어지는 무작위 그래프의 성질을 이해 불가

→ 어떻게 해결해야 하는가?

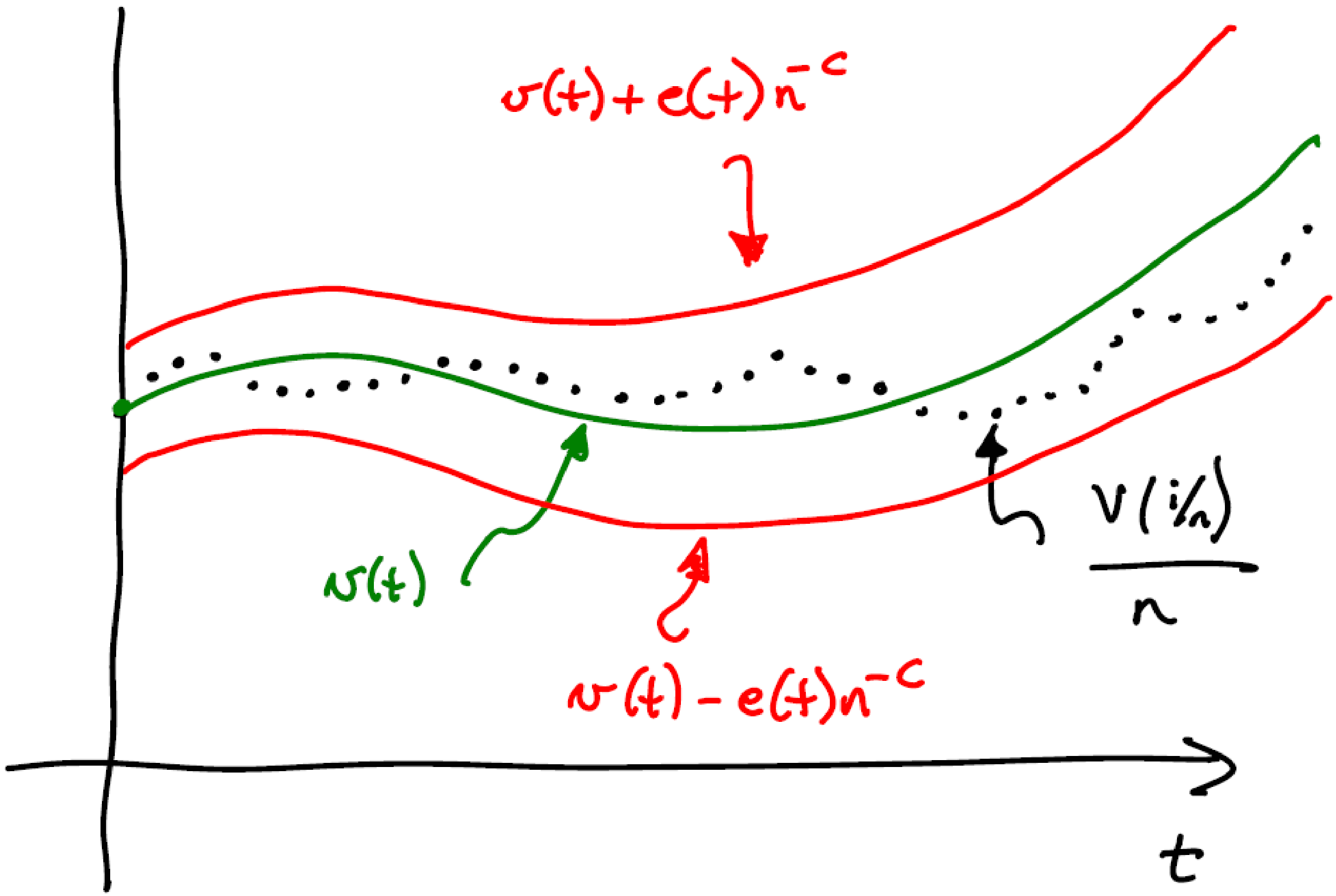
→ **미분 방정식 방법(Differential Equation Method)을 이용!**

미분 방정식 방법의 기본 발상

미분 방정식 방법의 기본 발상



미분 방정식 방법의 기본 발상



한 단계 변화의 기대값을 정확히 알아야 함

예제를 통해 이해하는 미분 방정식 방법
예제: *2-과정(The 2-process)*

2-과정(The 2-process)

- G(0): n개의 점이 있고, 선분이 없는 그래프
- i>0에 대해 G(i-1)이 주어졌다고 가정
- 점 u,v에 대해, uv가 **열려 있다**: uv가 G(i-1)의 선분이 아니고, 점 u와 v의 차수가 2보다 작다.
- G(i-1)에서 열려 있는 e_i=uv를 선택(모든 열려 있는 uv가 뽑힐 확률은 같다).
- G(i) = G(i-1)$\cup$\{e_i\}
- 더 이상 열려 있는 점의 쌍이 없으면 과정이 끝남

2-과정(The 2-process)

- G(0): n개의 점이 있고, 선분이 없는 그래프
- i>0에 대해 G(i-1)이 주어졌다고 가정
- 점 u,v에 대해, uv가 **열려 있다**: uv가 G(i-1)의 선분이 아니고, 점 u와 v의 차수가 2보다 작다.
- G(i-1)에서 열려 있는 e_i=uv를 선택(모든 열려 있는 uv가 뽑힐 확률은 같다).
- $G(i) = G(i-1) \cup \{e_i\}$
- 더 이상 열려 있는 점의 쌍이 없으면 과정이 끝남

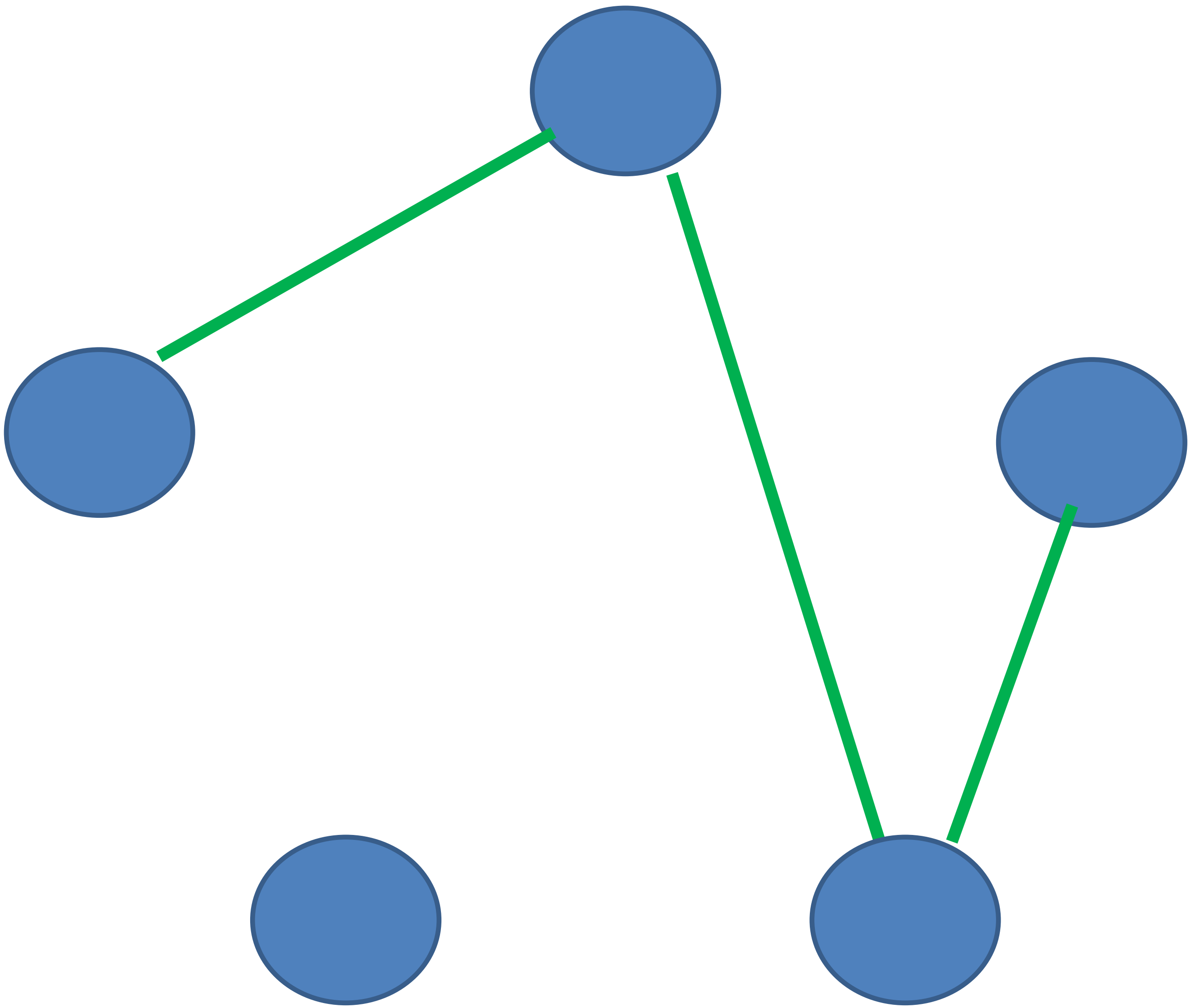
- $\triangle(G(i)) \leq 2$

2-과정(The 2-process)

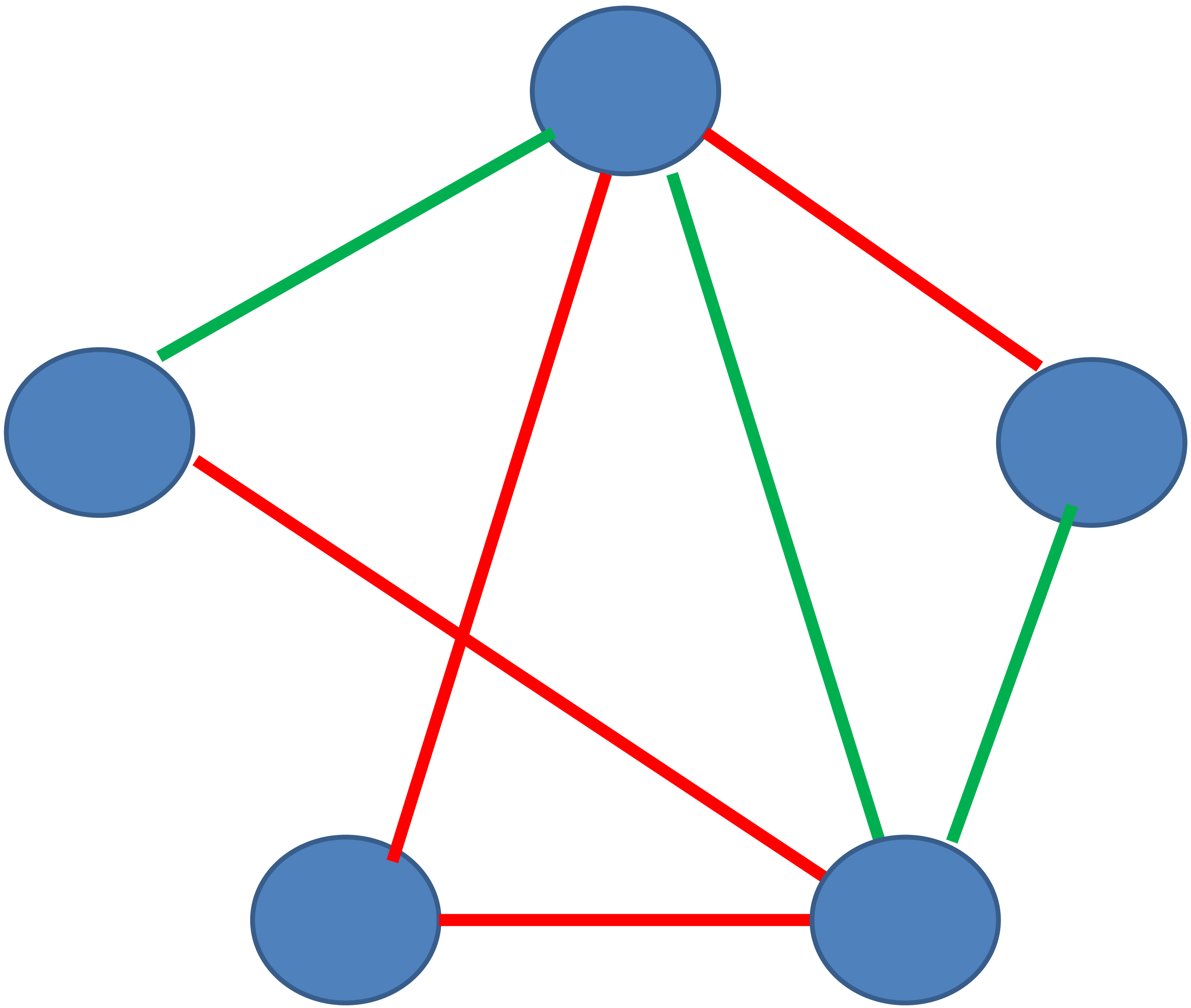
- G(0): n개의 점이 있고, 선분이 없는 그래프
- i>0에 대해 G(i-1)이 주어졌다고 가정
- 점 u,v에 대해, uv가 **열려 있다**: uv가 G(i-1)의 선분이 아니고, 점 u와 v의 차수가 2보다 작다.
- G(i-1)에서 열려 있는 e_i=uv를 선택(모든 열려 있는 uv가 뽑힐 확률은 같다).
- G(i) = G(i-1)∪{e_i}
- 더 이상 열려 있는 점의 쌍이 없으면 과정이 끝남

- $\triangle(G(i)) \leq 2$
- $|E(G(i))| = i$

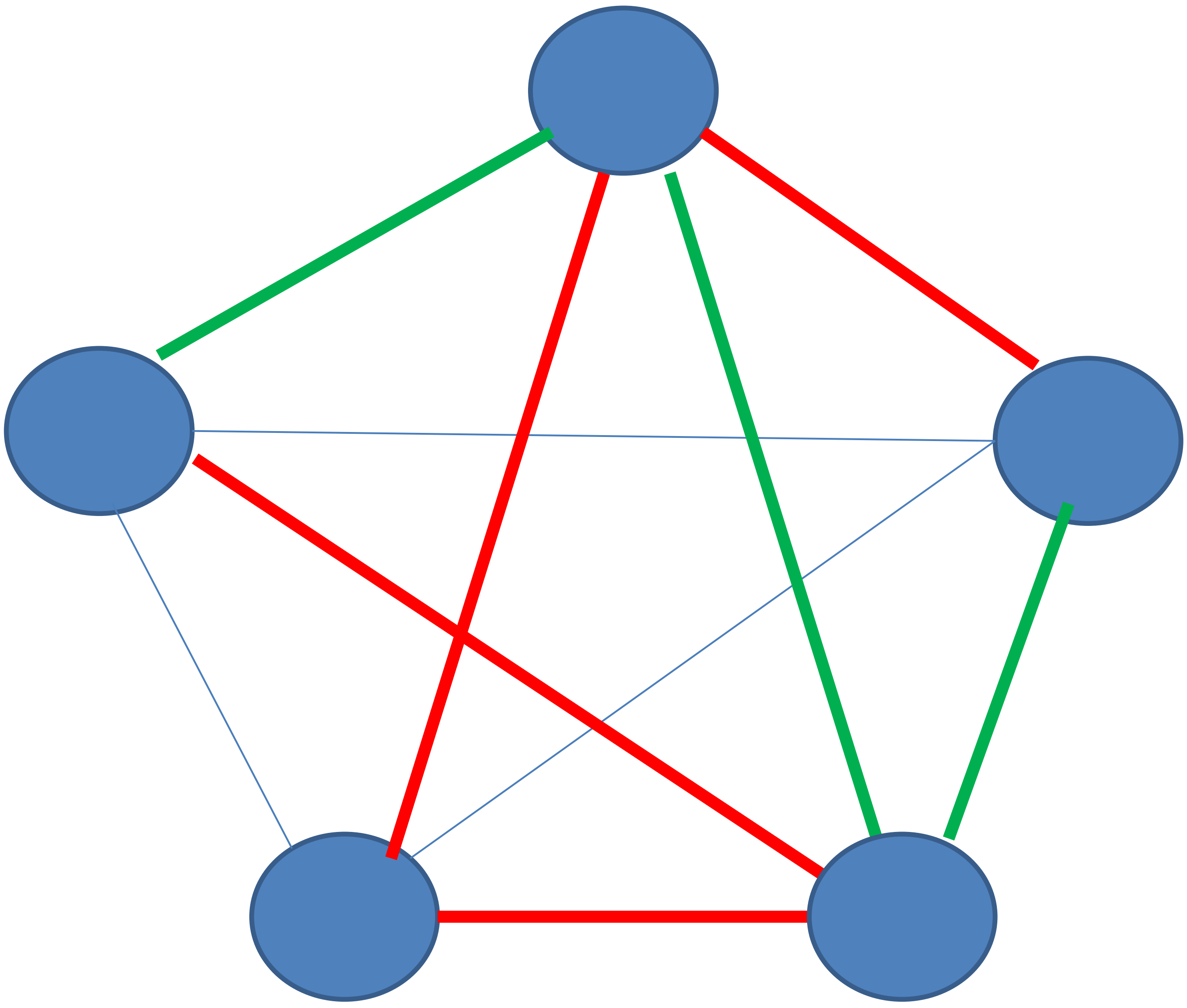
2-과정(The 2-process)



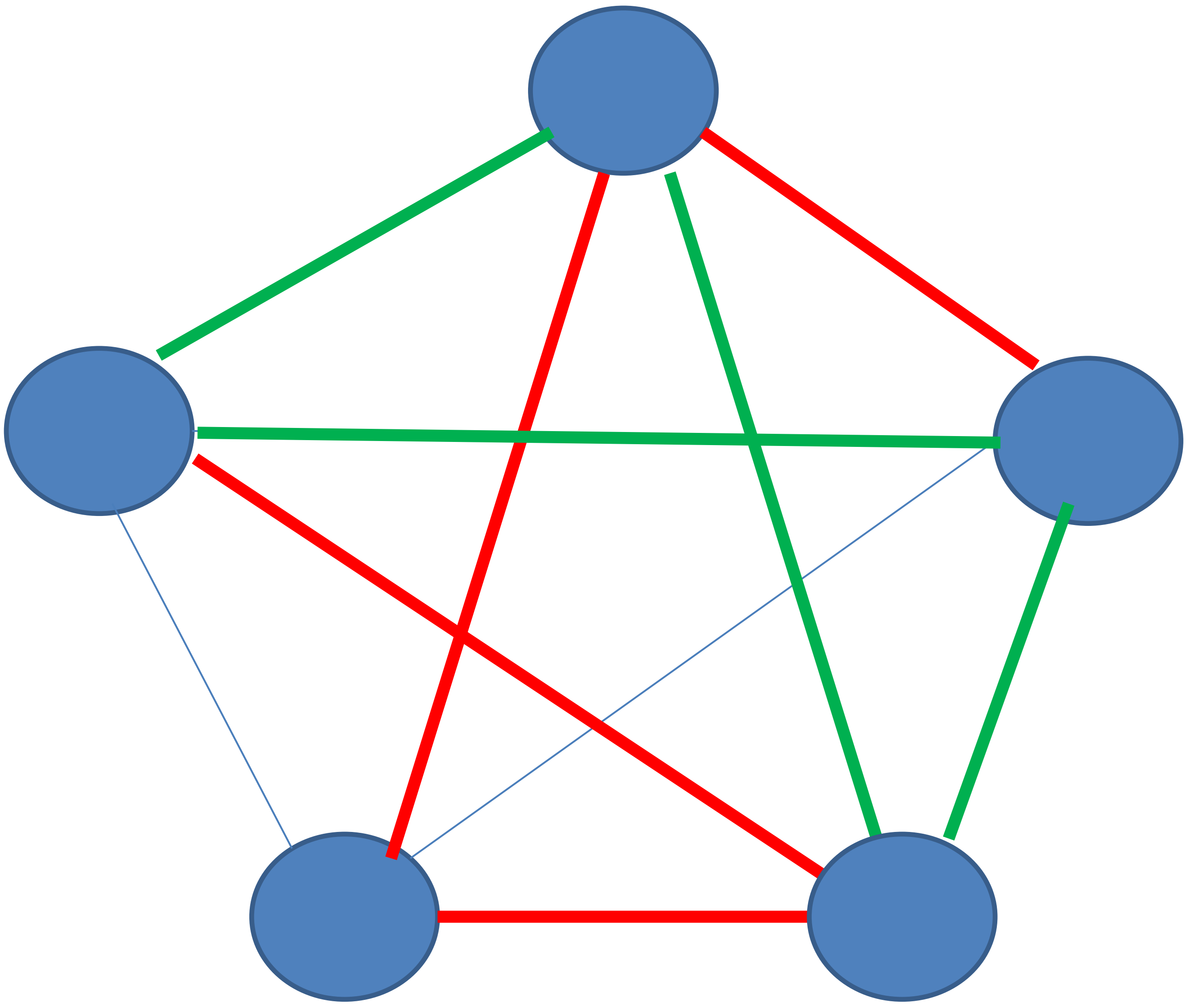
2-과정(The 2-process)



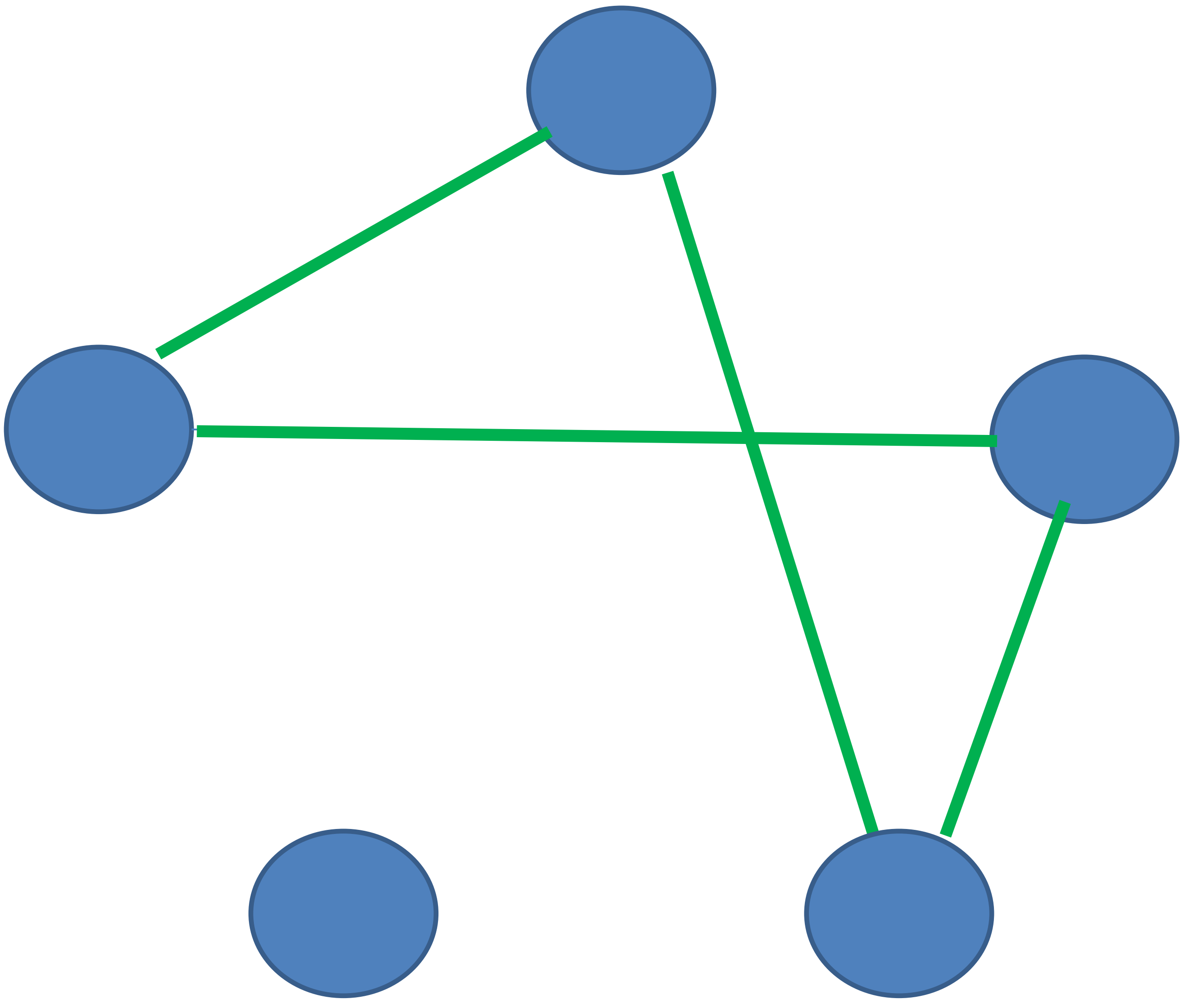
2-과정(The 2-process)



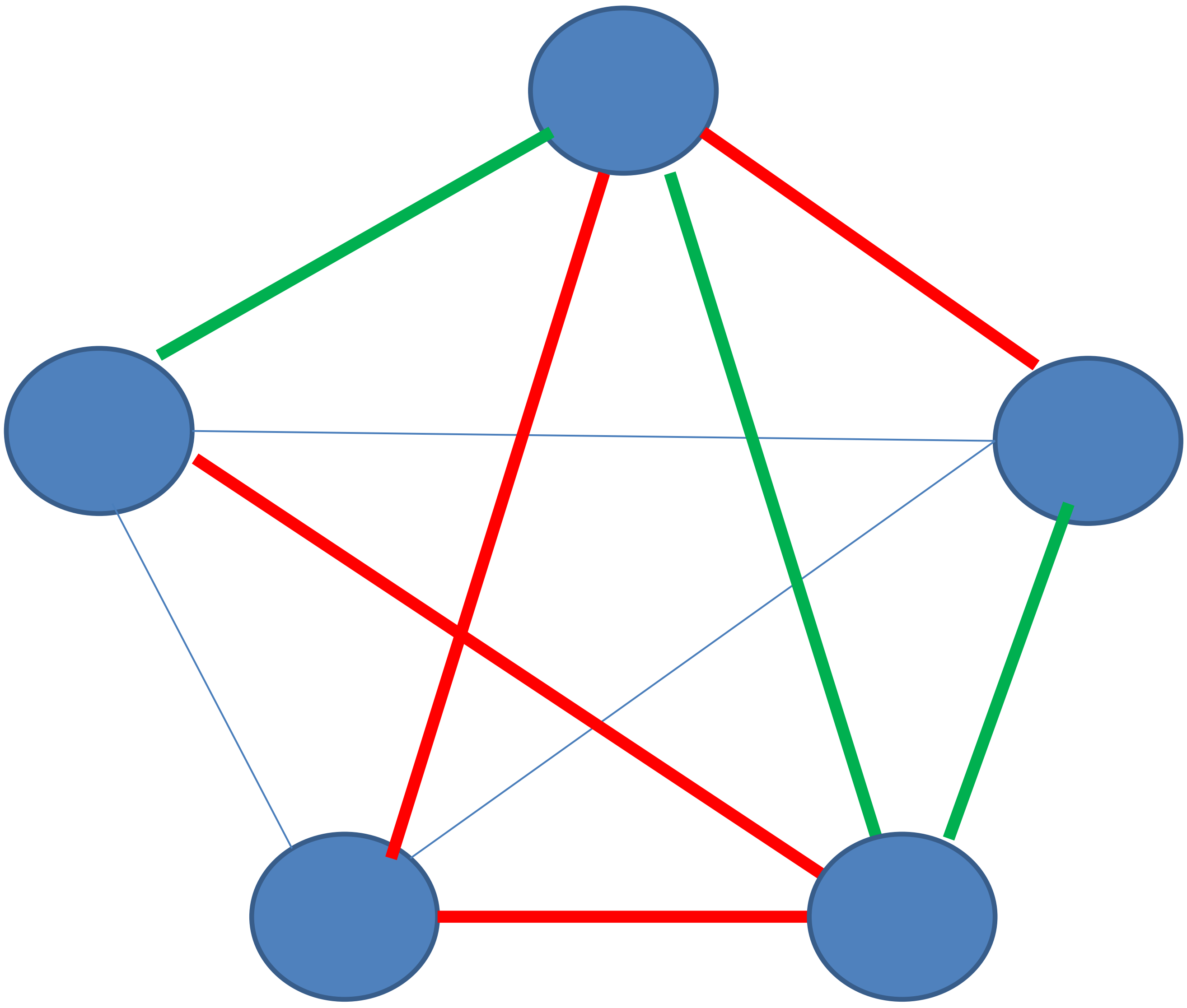
2-과정(The 2-process)



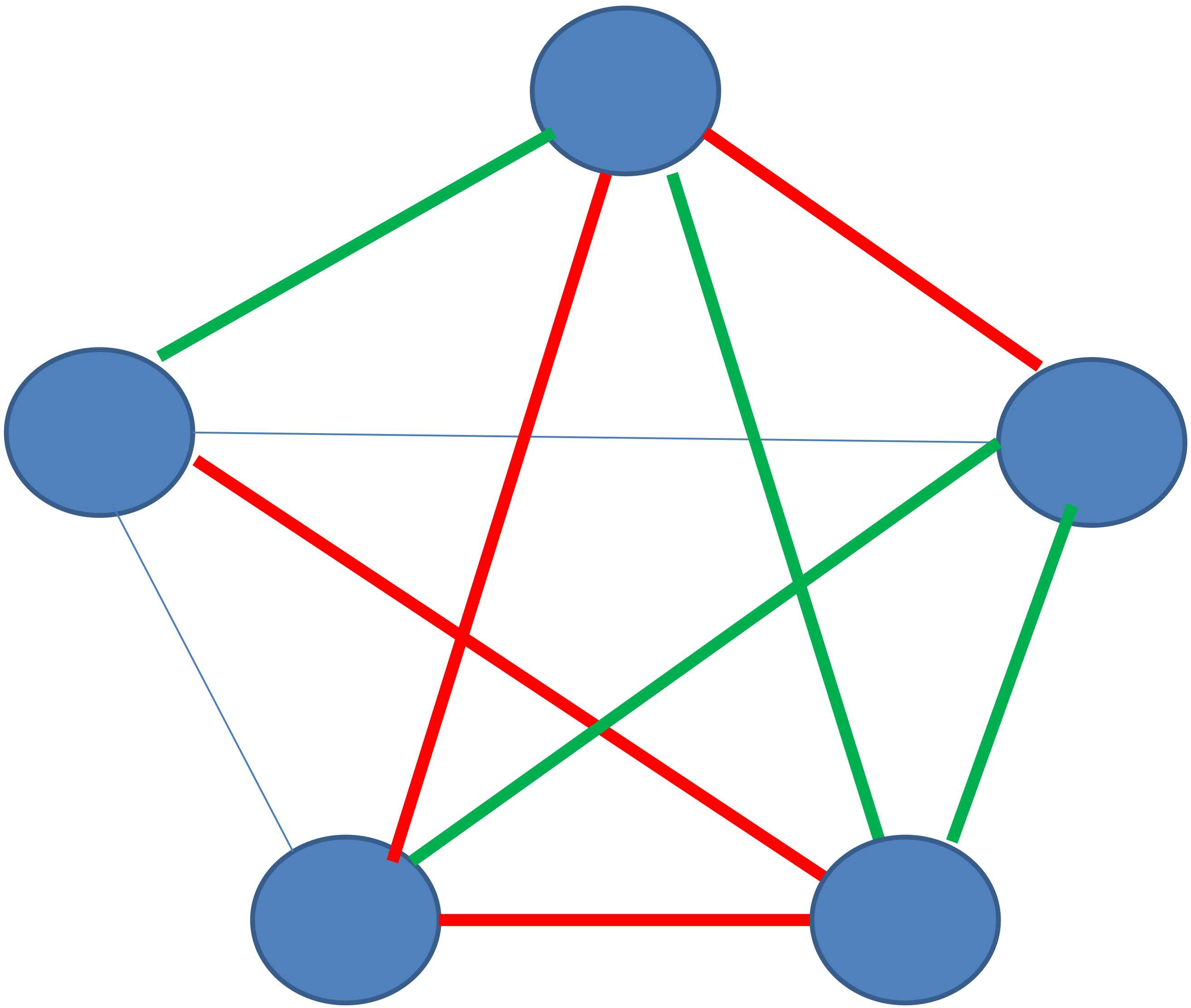
2-과정(The 2-process)



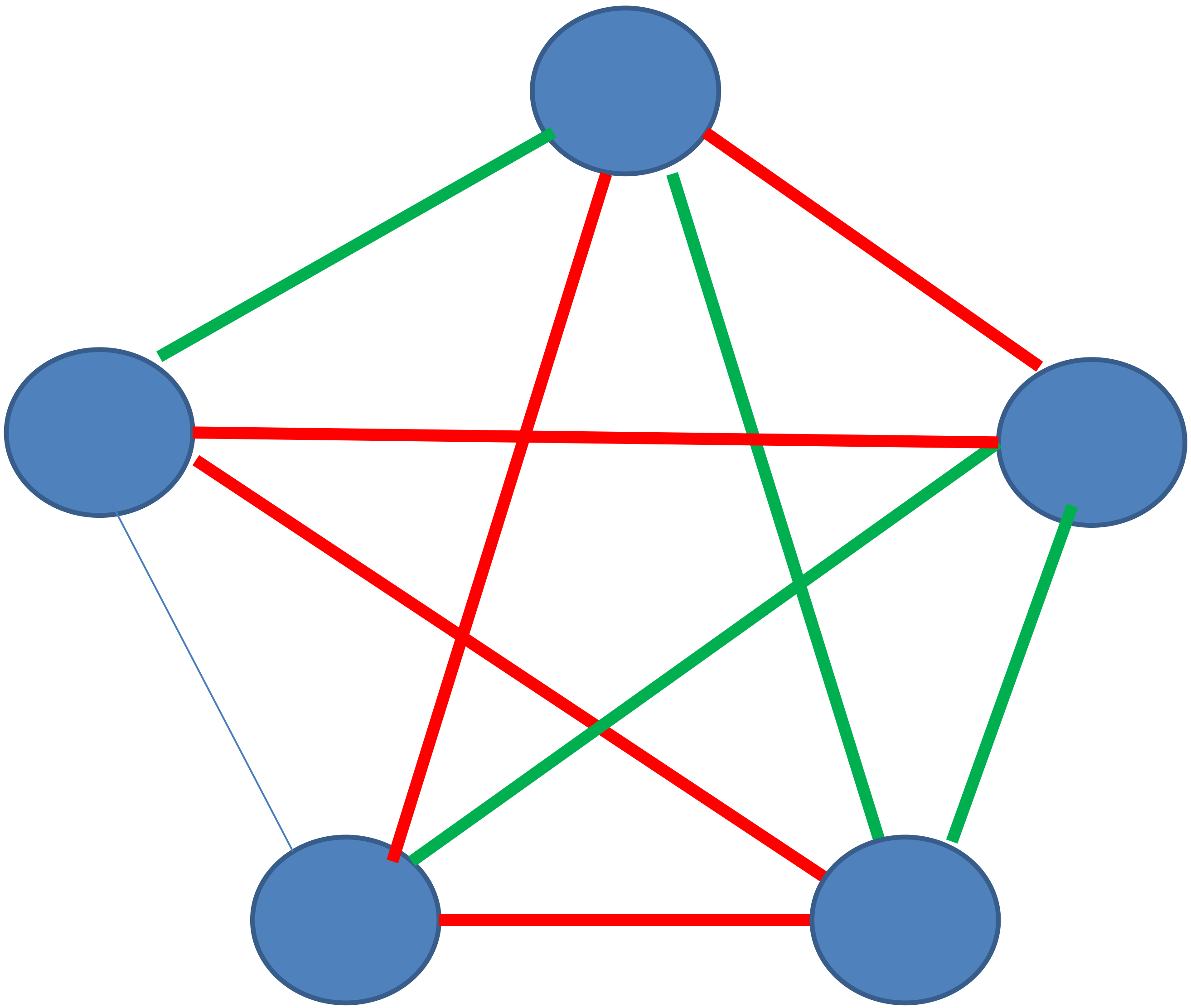
2-과정(The 2-process)



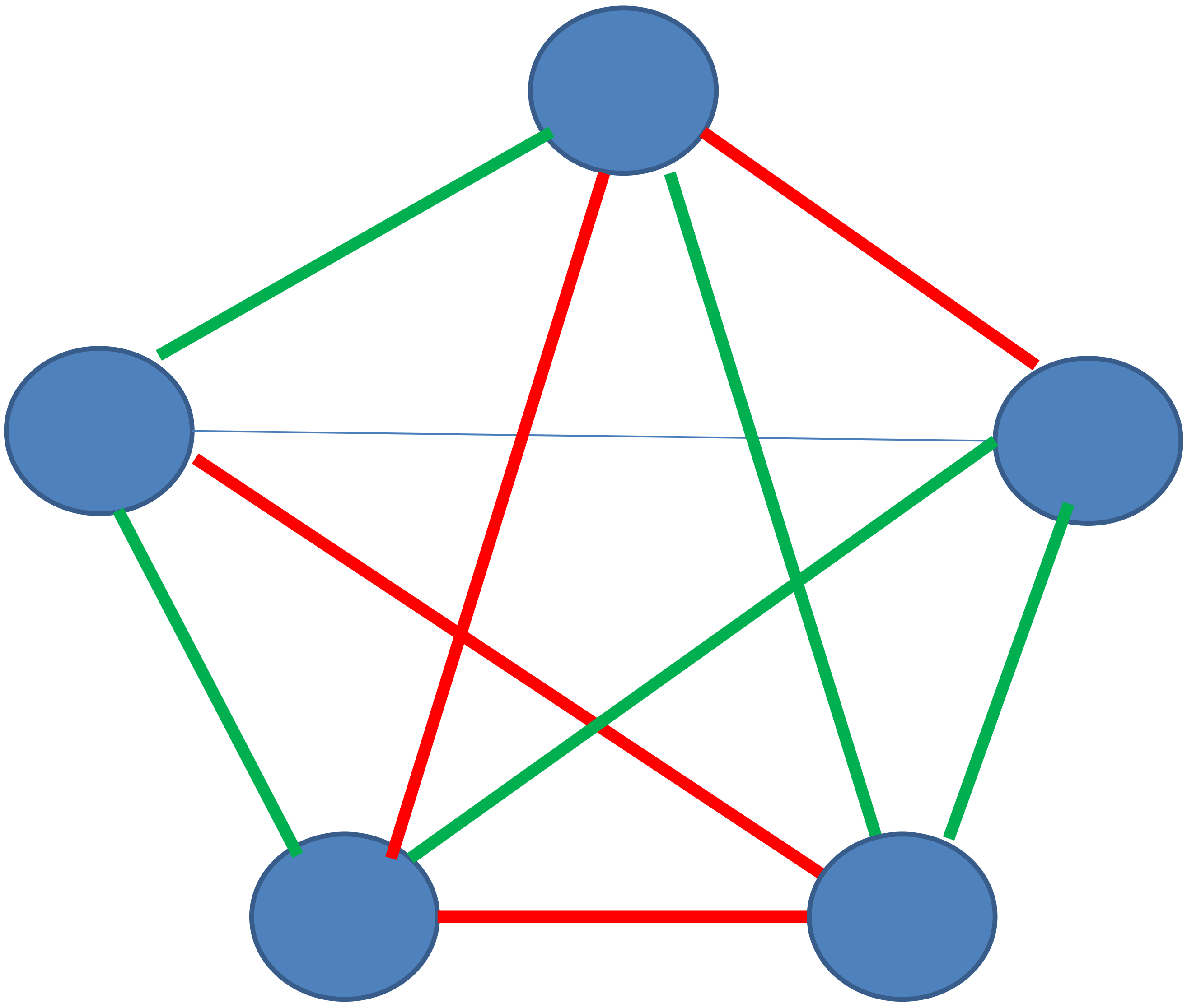
2-과정(The 2-process)



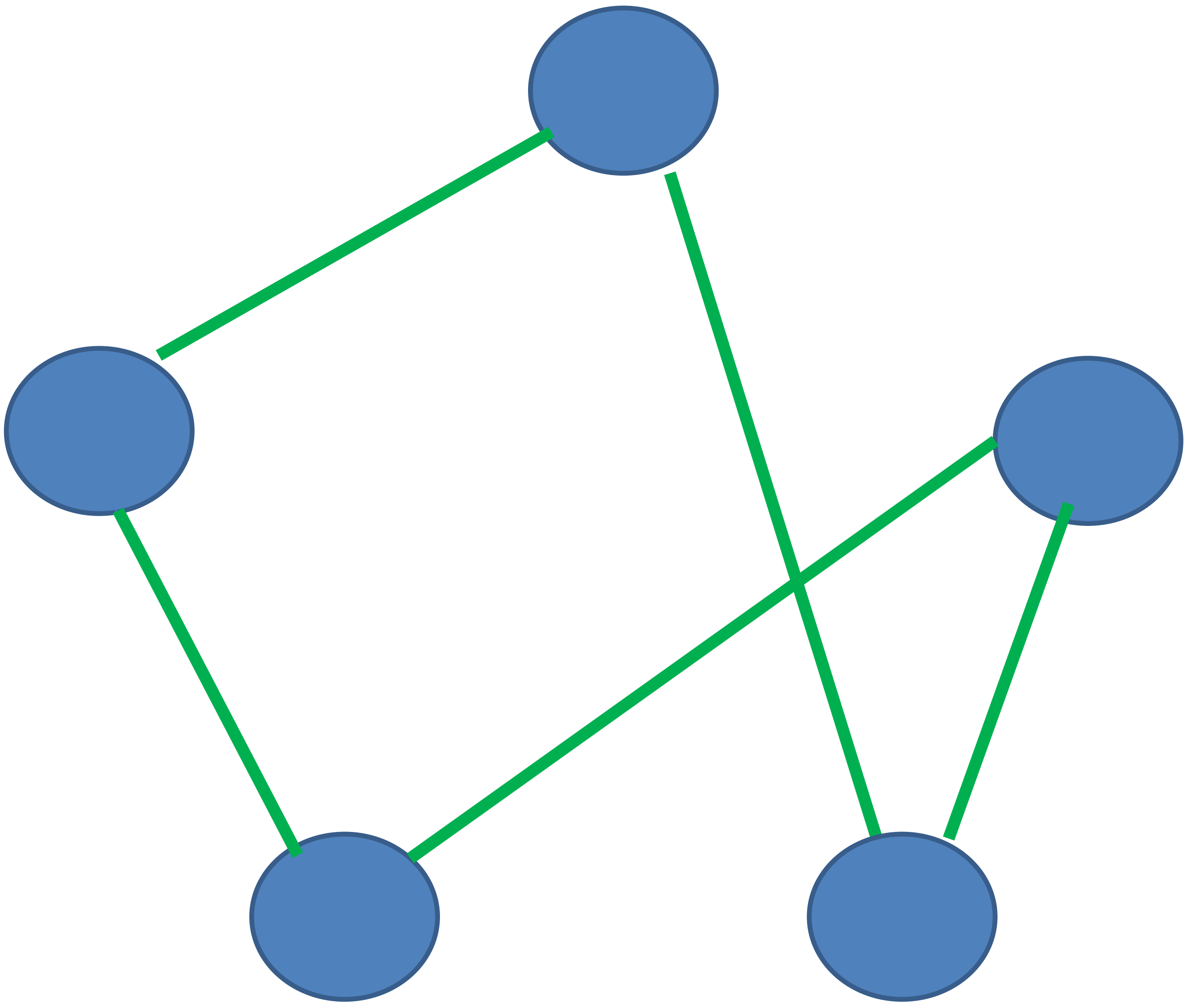
2-과정(The 2-process)



2-과정(The 2-process)



2-과정(The 2-process)



2-과정(The 2-process)

- **Goal**
  2-과정으로 얻어지는 최종 그래프:
  높은 확률로(whp) 겹치지 않는 회로(Cycle)들의 합집합

적절한 확률 변수 시스템 고르기

- 차수 0, 1, 2인 점들의 개수
- **$Y_d(i)$**: G(i)에서 차수가 d인 점들의 수 (d=0,1,2)

적절한 확률 변수 시스템 고르기

- 차수 0, 1, 2인 점들의 개수
- **Y_d(i)**: G(i)에서 차수가 d인 점들의 수 (d=0,1,2)

- 모든 i에 대하여 $n = Y_0(i) + Y_1(i) + Y_2(i)$ 만족 …(1)

적절한 확률 변수 시스템 고르기

- 차수 0, 1, 2인 점들의 개수
- **Y_d(i)**: G(i)에서 차수가 d인 점들의 수 (d=0,1,2)

- 모든 i에 대하여 $n = Y_0(i) + Y_1(i) + Y_2(i)$ 만족 ...(1)

- G(i)의 선분의 개수 = i → $2i = Y_1(i) + 2Y_2(i)$ ...(2)

적절한 확률 변수 시스템 고르기

- 차수 0, 1, 2인 점들의 개수
- **Y_d(i)**: G(i)에서 차수가 d인 점들의 수 (d=0,1,2)

- 모든 i에 대하여 $n = Y_0(i) + Y_1(i) + Y_2(i)$ 만족 ...(1)

- G(i)의 선분의 개수 = i → $2i = Y_1(i) + 2Y_2(i)$ ...(2)

$$Y_2(i) = 2i - (n - Y_0(i)) = 2i + Y_0(i) - n$$
$$Y_1(i) = 2i - 2Y_2(i) = 2(n - i - Y_0(i))$$

적절한 확률 변수 시스템 고르기

- 차수 0, 1, 2인 점들의 개수
- **Y_d(i)**: G(i)에서 차수가 d인 점들의 수 (d=0,1,2)

- 모든 i에 대하여 $n = Y_0(i) + Y_1(i) + Y_2(i)$ 만족 ...(1)

- G(i)의 선분의 개수 = i → $2i = Y_1(i) + 2Y_2(i)$ ...(2)

$$Y_2(i) = 2i - (n - Y_0(i)) = 2i + Y_0(i) - n$$

$$Y_1(i) = 2i - 2Y_2(i) = 2(n - i - Y_0(i))$$

- **Q(i)**: G(i)에서 열려 있는 uv의 수
- uv가 G(i)에서 열려 있다 ⇔ G(i)의 선분이 아니고, 양 끝점이 **불포화 상태**(차수가 0이거나 1)이다.
- **U(i)**: 불포화 상태인 점의 수; $U(i) = Y_0(i) + Y_1(i)$

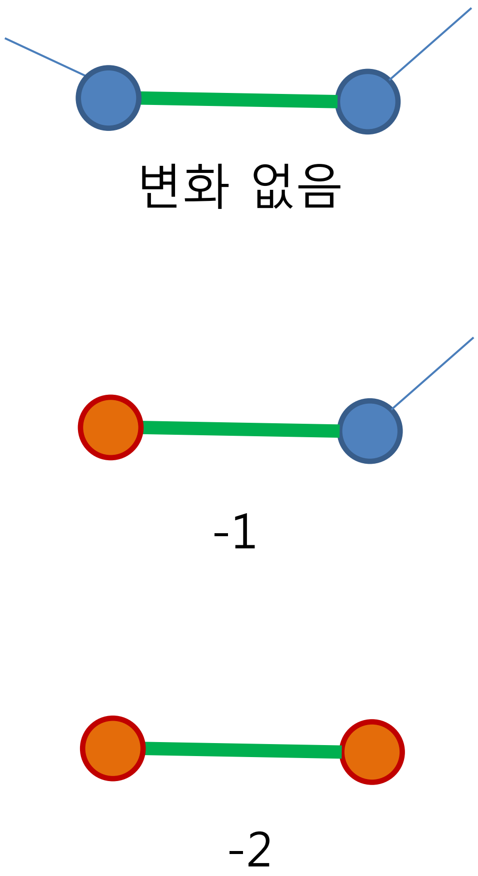
- E(G(i))≤n → $\binom{U(i)}{2} - n \le Q(i) \le \binom{U(i)}{2}$

한 단계 변화의 기대값 구하기

- 한 단계 변화의 기대값: $E(Y_0(i+1)-Y_0(i)\,|\,G(i))$

한 단계 변화의 기대값 구하기

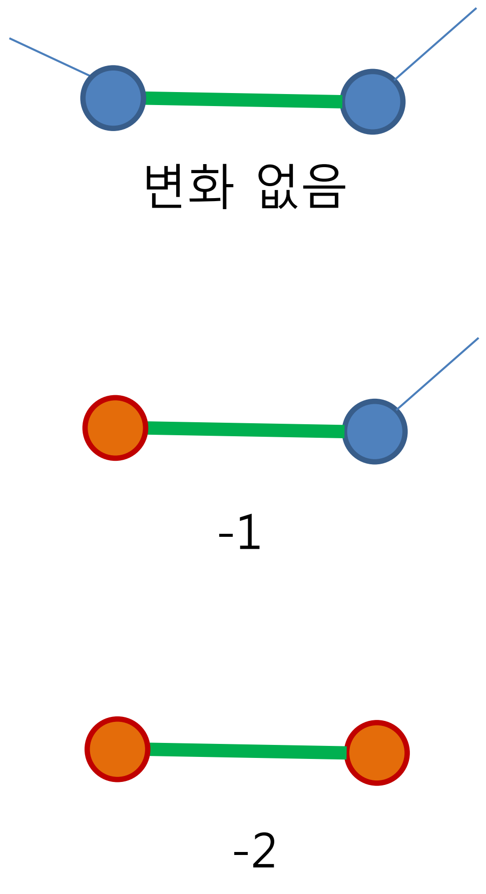
- 한 단계 변화의 기대값: $E(Y_0(i+1)-Y_0(i)\,|\,G(i))$
- $Y_0(i+1)-Y_0(i)$ = 0,-1 or -2



한 단계 변화의 기대값 구하기

- 한 단계 변화의 기대값: $E(Y_0(i+1)-Y_0(i)\,|\,G(i))$
- $Y_0(i+1)-Y_0(i)$ = 0,-1 or -2

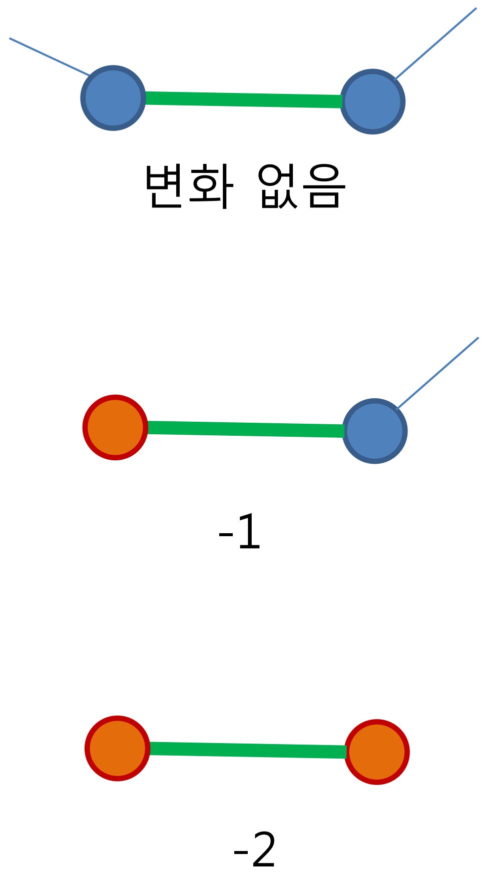
- 변화가 -1인 경우: e_{i+1}이 $Y_0(i)Y_1(i)$에서 뽑힘
- 변화가 -2인 경우: e_{i+1}이 $\binom{Y_0(i)}{2}$에서 뽑힘



한 단계 변화의 기대값 구하기

- 한 단계 변화의 기대값: $E(Y_0(i+1)-Y_0(i)\,|\,G(i))$
- $Y_0(i+1)-Y_0(i)$ = 0,-1 or -2
- 변화가 -1인 경우: e_{i+1}이 $Y_0(i)Y_1(i)$에서 뽑힘
- 변화가 -2인 경우: e_{i+1}이 $\binom{Y_0(i)}{2}$ 에서 뽑힘

$$E(Y_0(i+1)-Y_0(i)\,|\,G(i)) = -\frac{2\binom{Y_0(i)}{2}+Y_0(i)Y_1(i)}{Q(i)}$$



한 단계 변화의 기대값 구하기

- 0≤i≤n-n$^{1-\varepsilon}$, ε>0 (예: ε=1/10)
- $Y_1(i) = 2(n-i-Y_0(i))$ 로부터 $Y_0(i) \le n-i$

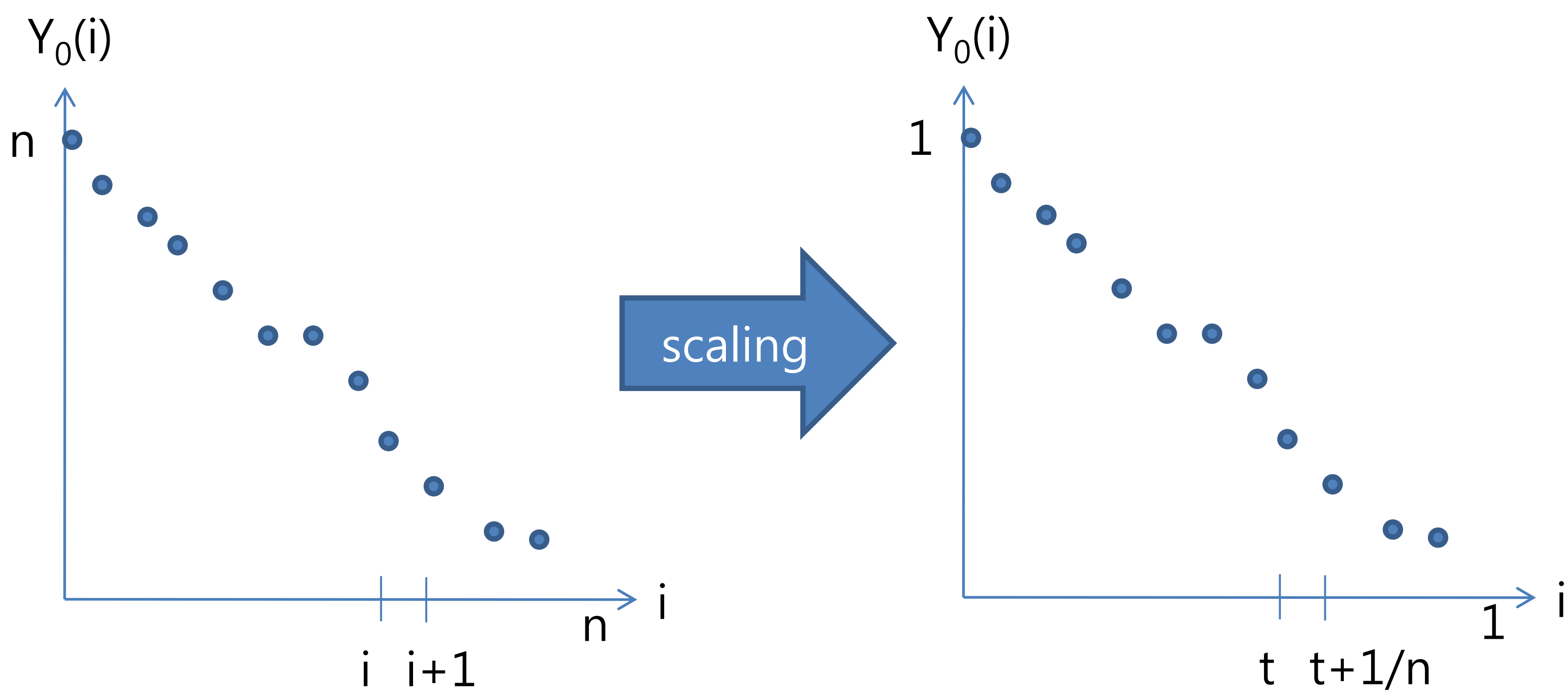
  → $U(i) = 2(n-i) - Y_0(i) \ge n-i \ge n^{1-\varepsilon}$
- 근사식 계산 $E(Y_0(i+1) - Y_0(i) \mid G(i)) = -\dfrac{2\binom{Y_0(i)}{2} + Y_0(i)Y_1(i)}{Q(i)}$

$$= \frac{-Y_0(i)(U(i)-1)}{U(i)^2/2 + O(n)} = \frac{-2Y_0(i)}{U(i)} + O(n^{-1+2\varepsilon})$$

한 단계 변화에 대응하는 미분 방정식 구하기

- 시간 변수 i와 확률 변수 $Y_0(i)$에 대한 **비례 축소(Scaling)**가 필요
- i=tn, Y(i)=y(t)n
- y : [0,1] → [0,1]

$$Y_0(i+1)-Y_0(i) \approx y(t+1/n)n - y(t)n \approx y'(t)$$



한 단계 변화에 대응하는 미분 방정식 구하기

$$E(Y_0(i+1)-Y_0(i)\,|\,G(i))=\frac{-2Y_0(i)}{U(i)}+O(n^{-1+2\varepsilon})$$

$$Y_0(i+1)-Y_0(i)\approx y(t+1/n)n-y(t)n\approx y'(t)$$

한 단계 변화에 대응하는 미분 방정식 구하기

$$E(Y_0(i+1)-Y_0(i)\,|\,G(i)) = \frac{-2Y_0(i)}{U(i)} + O(n^{-1+2\varepsilon})$$

$$Y_0(i+1)-Y_0(i) \approx y(t+1/n)n - y(t)n \approx y'(t)$$

→ $$\boxed{y'(t) = \frac{-2y(t)}{2(1-t)-y(t)}}$$

한 단계 변화에 대응하는 미분 방정식 구하기

$$E(Y_0(i+1)-Y_0(i)\,|\,G(i))=\frac{-2Y_0(i)}{U(i)}+O(n^{-1+2\varepsilon})$$

$$Y_0(i+1)-Y_0(i)\approx y(t+1/n)n-y(t)n\approx y'(t)$$

→ $$\boxed{y'(t)=\frac{-2y(t)}{2(1-t)-y(t)}}$$

→ $$y(t)(2-\log y(t))=2(1-t)$$

y(0)=1 → y(1)=0

한 단계 변화에 대응하는 미분 방정식 구하기

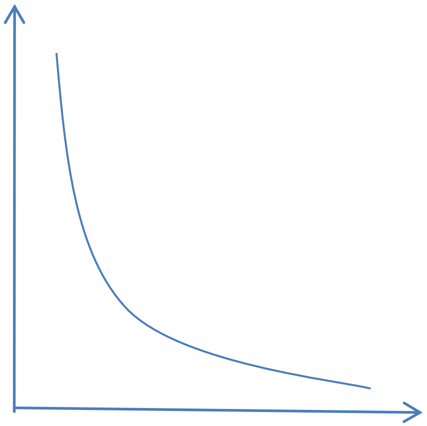
$$E(Y_0(i+1)-Y_0(i)\,|\,G(i))=\frac{-2Y_0(i)}{U(i)}+O(n^{-1+2\varepsilon})$$

$$Y_0(i+1)-Y_0(i)\approx y(t+1/n)n-y(t)n\approx y'(t)$$

→ $$\boxed{y'(t)=\frac{-2y(t)}{2(1-t)-y(t)}}$$

→ $$y(t)(2-\log y(t))=2(1-t)$$

y(0)=1 → y(1)=0



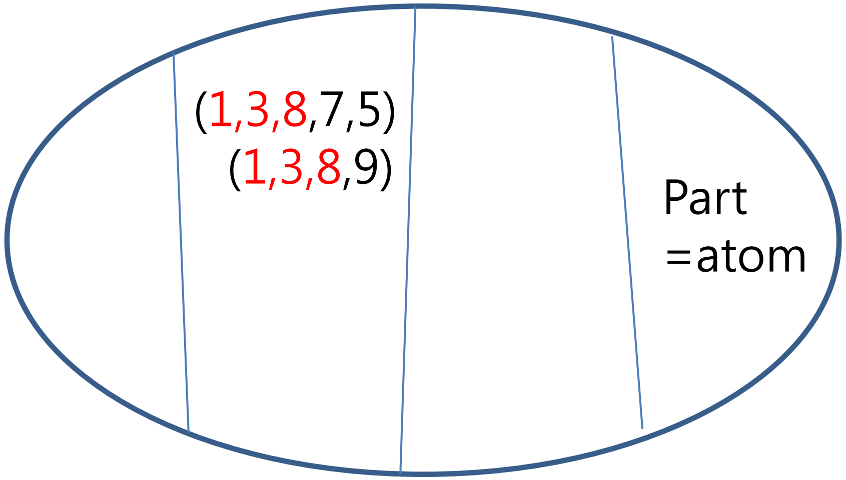
마팅게일(Martingale)

- **마팅게일(Martingale):** 확률 변수들의 배열 X_0, X_1, … 이 조건 $E(X_{i+1}|X_0, \ldots, X_i)=X_i$ 만족할 때 마팅게일이라고 한다.

(예) 공정한 게임을 하는 도박사

마팅게일(Martingale)

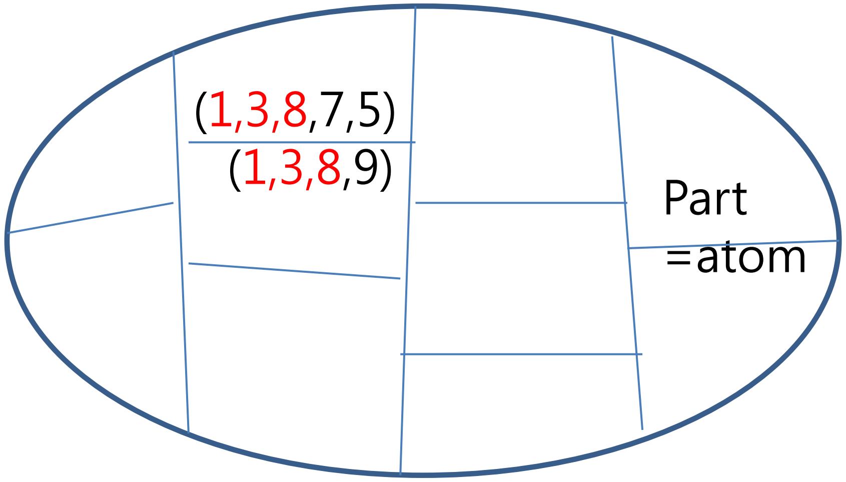
- Ω : 최종 그래프의 히스토리를 담은 선분들의 배열의 집합
  (예) {(1,3,8,9), (1,3,8,7,5), … }
- ω∈Ω : 가능한 과정의 진행
- $x \sim_i y$: x와 y의 처음 i개 엔트리가 일치할 때
- P_i : $\sim_i$ 에 의해 얻어지는 분할(partition)
- F_i : P_i 의 파트들의 합집합으로 표현되는 모든 부분집합의 모임



마팅게일(Martingale)

- Ω : 최종 그래프의 히스토리를 담은 선분들의 배열의 집합
  (예) {(1,3,8,9), (1,3,8,7,5), … }
- ω∈Ω : 가능한 과정의 진행
- $x \sim_i y$: x와 y의 처음 i개 엔트리가 일치할 때
- P_i : $\sim_i$ 에 의해 얻어지는 분할(partition)
- F_i : P_i 의 파트들의 합집합으로 표현되는 모든 부분집합의 모임

- $F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots$

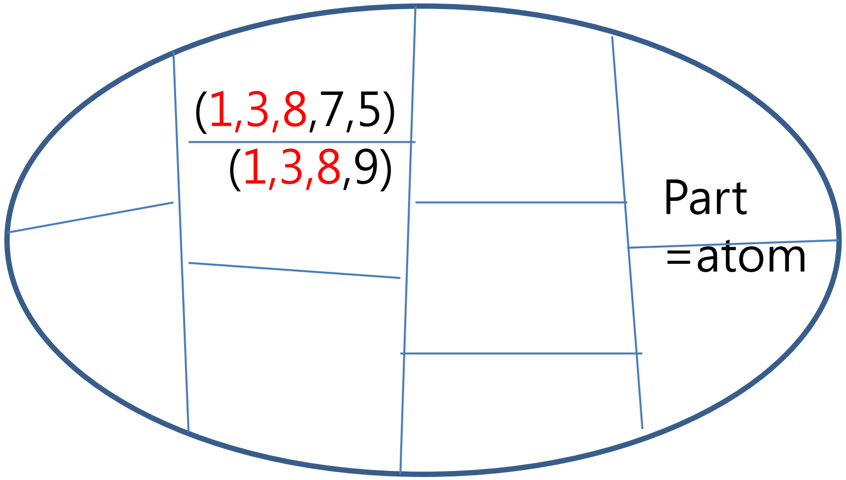


마팅게일(Martingale)

- Ω : 최종 그래프의 히스토리를 담은 선분들의 배열의 집합
  (예) {(1,3,8,9), (1,3,8,7,5), … }
- $\omega \in \Omega$: 가능한 과정의 진행
- $x \sim_i y$: x와 y의 처음 i개 엔트리가 일치할 때
- P_i : $\sim_i$ 에 의해 얻어지는 분할(partition)
- F_i : P_i 의 파트들의 합집합으로 표현되는 모든 부분집합의 모임

- $F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots$

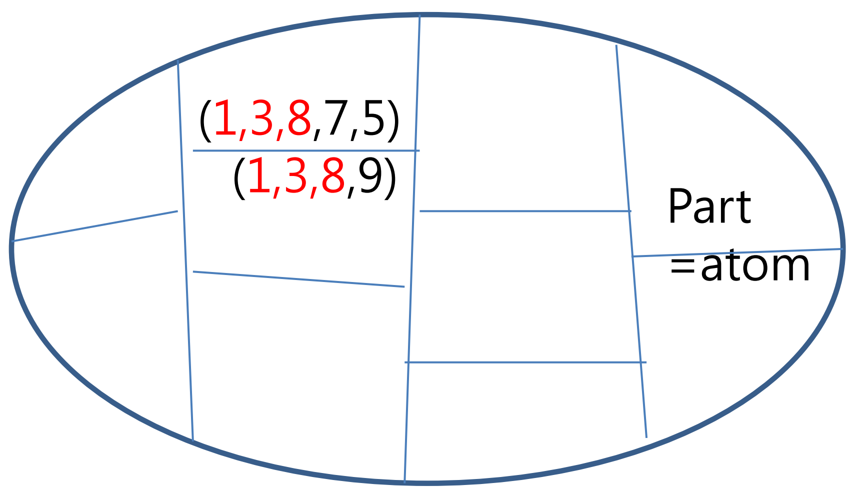
- 마팅게일 : $E(X_{i+1}|F_i)=X_i$



마팅게일(Martingale)

- Ω : 최종 그래프의 히스토리를 담은 선분들의 배열의 집합
  (예) {(1,3,8,9), (1,3,8,7,5), … }
- ω∈Ω : 가능한 과정의 진행
- $x \sim_i y$: x와 y의 처음 i개 엔트리가 일치할 때
- P_i : $\sim_i$ 에 의해 얻어지는 분할(partition)
- F_i : P_i 의 파트들의 합집합으로 표현되는 모든 부분집합의 모임

- $F = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots$
- 마팅게일 : $E(X_{i+1}|F_i)=X_i$



$$E(X\mid F)(\omega)=E_{\omega'\in[\omega]}X(\omega')=P([\omega])^{-1}\sum_{\omega'\in[\omega]}P(\omega')X(\omega')$$

마팅게일(Martingale)

- 성질 - **Repeated Averaging**
  $E(E(X|F')|F)=E(X|F)$

- **둡 마팅게일(Doob Martingale)** : $F= F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots$ on Ω, 확률 변수 X
  $X_i=E(X|F_i)$

- $E(X|F_i)=E(E(X|F_{i+1})|F_i)=E(X|F_i)=X_i$

아즈마-호이프딩(Azuma-Hoeffding) 부등식

◎ **아즈마-호이프딩 부등식**(Azuma-Hoeffding inequality): X_0, ... X_n이 마팅게일이고,
각 i에 대해 | $X_i - X_{i-1}$ |≤1을 만족할 때,

$$P(X_n - X_0 \geq a) \leq e^{-a^2/2n}$$

- 수퍼마팅게일(Supermartingale): $E(X_{i+1}|X_0, \ldots, X_i) \leq X_i$
- 서브마팅게일(Submartingale): $E(X_{i+1}|X_0, \ldots, X_i) \geq X_i$

- 수퍼마팅게일과 서브마팅게일에 대해서도 아즈마-호이프딩 부등식 적용 가능.

아즈마-호이프딩(Azuma-Hoeffding) 부등식

- $|V(G)|=n$, $|E(G)|=\frac{n^2}{4}$

- S: V(G)의 무작위 부분집합(random subset) – G의 각 점을 ½의 확률로 S에 넣음.
- $X=|E(G[S])|$
- $E(X)=\frac{n^2}{16}$

- $\{e\subseteq S\}$ 독립 X → 체르노프 부등식 사용 불가

아즈마-호이프딩(Azuma-Hoeffding) 부등식

- |V(G)|=n, |E(G)|= $\frac{n^2}{4}$

X는 평균 근처에 집중되어 있는가?

- S: V(G)의 무작위 부분집합(random subset) – G의 각 점을 ½의 확률로 S에 넣음.
- X=|E(G[S])|
- E(X)= $\frac{n^2}{16}$
- {e⊆S} 독립 X → 체르노프 부등식 사용 불가

아즈마-호이프딩(Azuma-Hoeffding) 부등식

X는 평균 근처에 집중되어 있는가?

- $|V(G)|=n$, $|E(G)|=\frac{n^2}{4}$
- S: V(G)의 무작위 부분집합(random subset) – G의 각 점을 ½의 확률로 S에 넣음.
- X=|E(G[S])|
- $E(X)=\frac{n^2}{16}$
- {e⊆S} 독립 X → 체르노프 부등식 사용 불가
- F_i : S에 들어가는 첫 i개의 점들로 구성되는 마팅게일
- 둡 마팅게일 $X_i=E(X|F_i)$ → $X_0=E(X)$, $X_n=X$

◎ **아즈마-호이프딩 부등식**(Azuma-Hoeffding inequality): $X_0, \ldots X_n$이 마팅게일이고, 각 i에 대해 $|X_i - X_{i-1}| \le 1$을 만족할 때,

$$P(X_n - X_0 \ge a) \le e^{-a^2/2n}$$

아즈마-호이프딩(Azuma-Hoeffding) 부등식을 이용한 집중 현상 증명

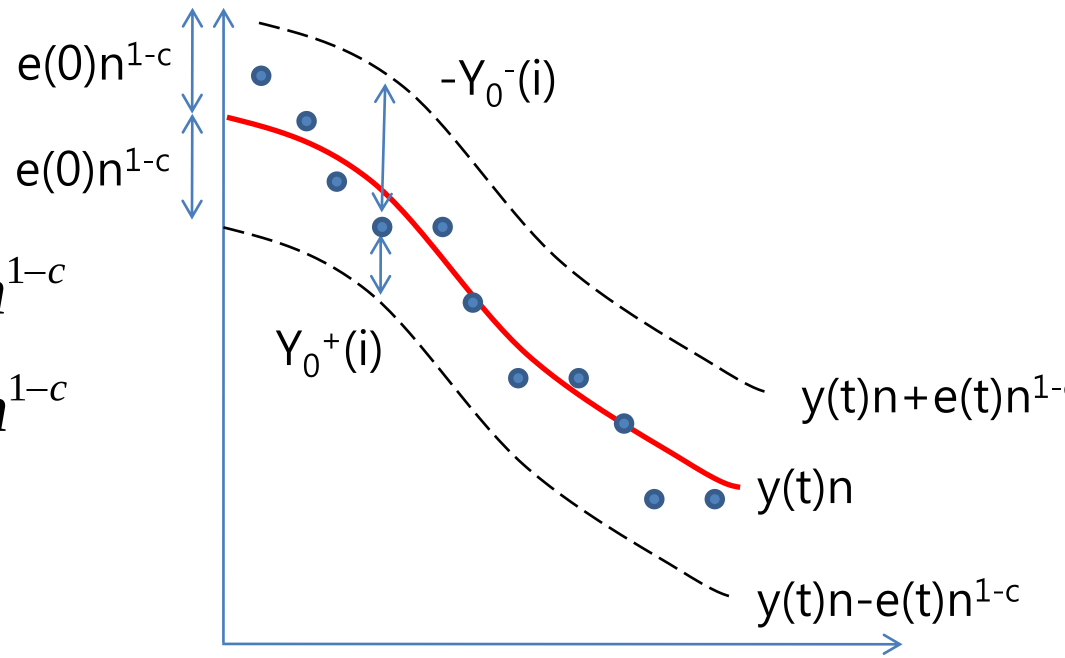
$$Y_0^-(i) = Y_0(i) - y(t)n - e(t)n^{1-c}$$

$$Y_0^+(i) = Y_0(i) - y(t)n + e(t)n^{1-c}$$

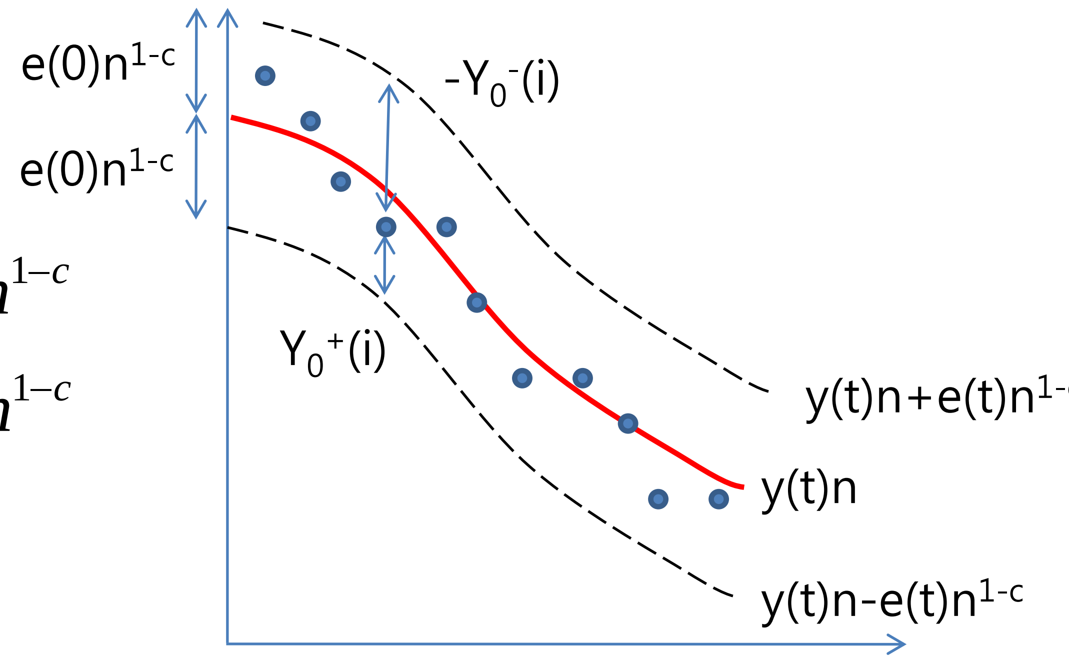
- $0<c<1/2$

- $Y_0^+(i)$: 서브마팅게일
- $Y_0^-(i)$: 수퍼마팅게일

- $Y_0^+(0)=e(0)n^{1-c}$



아즈마-호이프딩(Azuma-Hoeffding) 부등식을 이용한 집중 현상 증명



$$Y_0^-(i) = Y_0(i) - y(t)n - e(t)n^{1-c}$$

$$Y_0^+(i) = Y_0(i) - y(t)n + e(t)n^{1-c}$$

- $0<c<1/2$

- $Y_0^+(i)$: 서브마팅게일
- $Y_0^-(i)$: 수퍼마팅게일

- $Y_0^+(0)=e(0)n^{1-c}$

◎ **아즈마-호이프딩 부등식**(Azuma-Hoeffding inequality): X_0, … X_n이 마팅게일이고, 각 i에 대해 $|X_i - X_{i-1}| \leq 1$을 만족할 때,

$$P(X_n - X_0 \geq a) \leq e^{-a^2/2n}$$

결론

- Pr(Y_0(i)가 오차 범위를 벗어남)≤ $\exp\left(\dfrac{-(n^{1-c})^2}{2C^2(n-n^{1-\varepsilon})}\right)$

- $0 \le i \le n-n^{1-\varepsilon}$, $0<c<1/2$, $0<\varepsilon \le c/5$

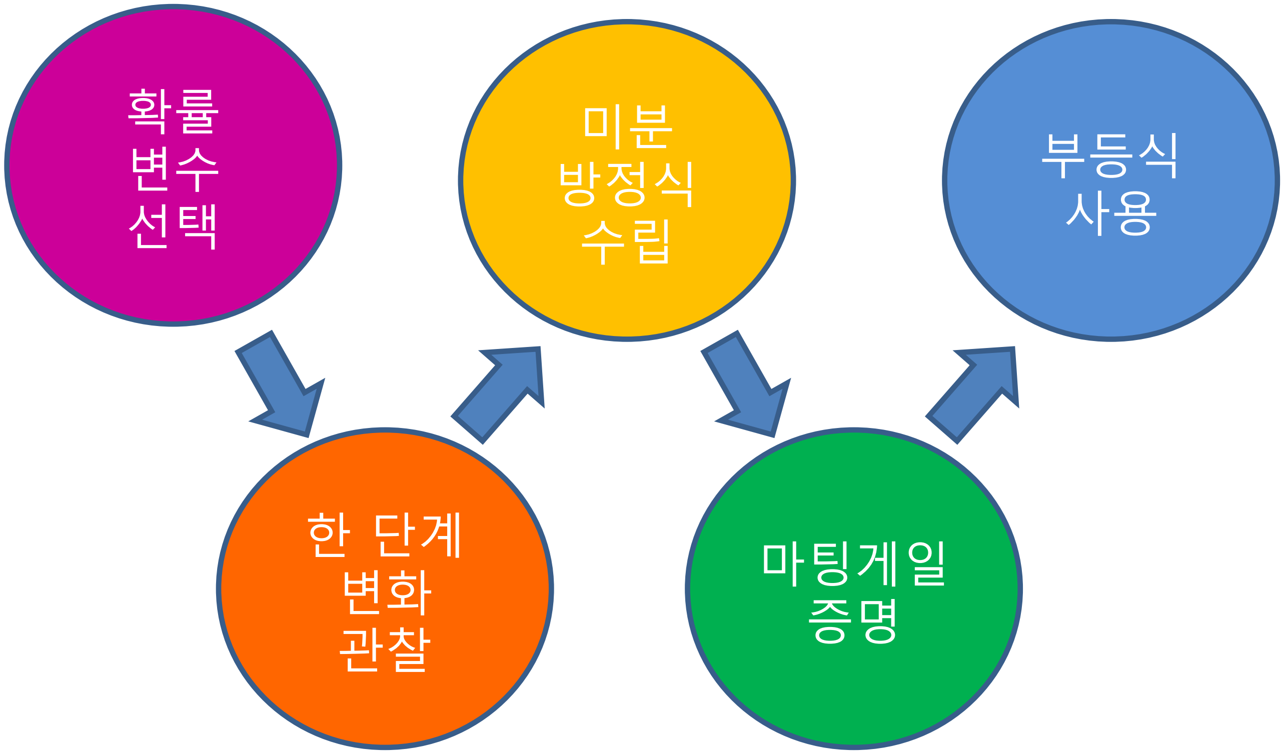
$$Y_0(i) = y(t)n \pm (1-t)^{-4} n^{1-c}$$

기타 예제

- d-과정(d-process) (Rucinski and Wormald, 1997)
  - d가 상수이고, n이 클 때 높은 확률로 결과 그래프는 d-정규(d-regular) 그래프.
- $G_{n,cn}$의 자이언트 컴포넌트(Giant component)
  - C_1 : $G_{n,cn}$에서 가장 큰 컴포넌트
  - $c<1/2$ $|C_1|=O(\log n)$,
  - $c>1/2$ $|C_1|=\Omega(n)$
- Δ이 없는 과정(Triangle-free process) (Bohman, 2009)
  - → 새로운 램지 수의 바운드 $R(3,t)=\Omega\left(\frac{t^2}{\log t}\right)$

정리

- 시간에 따라 진행되는 무작위 과정은 독립성을 지니지 않는 경우가 많다.
- 이러한 과정의 진행을 분석하기 위해 미분 방정식 방법은 유용하게 쓰일 수 있다.



참고 (체르노프 부등식 일반 버전)

◎ **체르노프 부등식**: $X_1, \ldots X_n$이 $P(X_i)=p_i$인 푸아송 시행을 따르고 서로 독립일 때,

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 이고 $\mu = E[X]$라 하자.

1. 모든 δ>0에 대하여, $\Pr[X > (1+\delta)\mu] < \left[\dfrac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{(1+\delta)}}\right]^{\mu}$

2. 모든 0<δ≤1에 대하여, $\Pr[X < (1-\delta)\mu] < \left[\dfrac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{(1-\delta)}}\right]^{\mu} < \exp(-\mu\delta^2/2)$

3. 모든 6μ≤R에 대하여, $\Pr(X \geq R) \leq 2^{-R}$

참고 문헌

- 전종우, 손건태, “확률의 개념 및 응용”, 자유아카데미.
- 라인하르트 디스텔(Reinhard Diestel), “그래프 이론(Graph Theory)”, 스프링거(Springer).
- 미카엘 밋첸마허(Michael Mitzenmacher), 엘리 웁팔(Eli Upfal), “확률과 계산(Probability and Computing)”, 캠브리지 대학 출판사(Cambridge University Press).
- 노가 알론(Noga Alon), 조엘 스펜서(Joel H. Spencer), “확률론적 방법(The Probabilistic Method)”, 와일리(Wiley Interscience).
- 피터 키바쉬(Peter Keevash), 톰 보먼(Tom Bohman)의 강의 노트, 프리-닥 코스 2010 베를린(Pre-Doc Course 2010 Berlin).
- 워몰드(N. C. Wormald), “무작위 그래프 과정과 탐욕 알고리즘을 위한 미분 방정식 방법(The differential equation method for random graph processes and greedy algorithms”, *Lectures on Approximation and Randomized Algorithms* (M. Karonski and H.J. Proemel, eds), pp. 73-155. PWN, Warsaw, 1999.
- 고영미, 랜덤 그래프(전공 소개), 2003년 대한수학회소식.
- N.C. Wormald, A. Rucinski, Random Graph Processes with Maximum degree 2, Annals of Applied Probability, pp.183-199, 1997.

Thanks! (Q&A)