

SAT/SMT 여름학교 들어가기 - SAT 문제 소개

윤용호, 조성근, 이우석, 이승중
프로그래밍연구실
서울대학교

2011.06.26

제 1회 MIT SAT/SMT 여름학교

- <http://people.csail.mit.edu/vganesh/summerschool/>



제 1회 MIT SAT/SMT 여름학교

- <http://people.csail.mit.edu/vganesh/summerschool/>



제 1회 MIT SAT/SMT 여름학교

- <http://people.csail.mit.edu/vganesh/summerschool/>



제 1회 MIT SAT/SMT 여름학교

- 인상 : 조금은 불친절한
 - 컨퍼런스 느낌
 - @_@??
- 오늘 특은 쉽게. 쉽게. 쉽게.
 - 9시간 × 6일 = 54시간 ⇒ 1시간으로 압축
 - 소화 할 수 있는 만큼만

SAT 문제

- **SAT**isfiability 문제
 - 주어진 진리식이 참이 되는 입력은?
 - 대답은 이렇게 합니다
 - 그런 입력은 없다
 - 이렇게 저렇게 넣으면 참이다
- 대표적인 NP-complete 문제
 - 이자 최초의 NP-complete(1971)

용어들

- 변수(literal)
 - x 혹은 x' (not x)
- 절(clause)
 - 'or(\vee)'로 변수들을 묶은 것
 - $x \vee y' \vee z$
 - 절의 최대 길이 k 에 따라 k -SAT
- CNF(Conjunctive Normal Form)
 - 'and(\wedge)'로 절들을 묶은 것
 - $(x \vee y' \vee z) \wedge (x' \vee y' \vee z') \wedge (x \vee z)$

CNF? DNF?

- DNF(Disjunctive Normal Form)
 - and를 먼저, or를 나중에.
 - $(a \wedge b) \vee (a' \wedge c)$
- 꼭 CNF여야 하나요?
 - $\{A...\} \wedge \{B...\} \wedge \{C...\}$ 에서 어느 하나만 거짓이면 전체가 거짓
 - 탐색을 멈추기에 유리

풀이의 착안점

- $[a \vee b] = [a' \rightarrow b]$
- 그래서
 - $[a \vee b \vee c] = [a' \rightarrow (b \vee c)]$
 - $[(a \vee b)' \rightarrow c] = [(a' \wedge b') \rightarrow c]$
- a와 b가 모두 거짓이면?
 - c는 무조건 참이어야
 - 즉, 마지막 하나는 자동으로 결정

$P_3 \vee P_6 \vee P_7' \vee P_8$

예시

{3, 6, -7, 8}

{1, 4, 7}

{-8, 4}

{-1, -3, 8}

{-3, -4, -8}

{-1, -2, 3, 4, -6}



{3, 6, -7, 8}

{1, 4, 7}

{-8, 4}

{-1, -3, 8}

{-3, -4, -8}

{-1, -2, 3, 4, -6}



{3, 6, -7, 8}

{1, 4, 7}

{-8, 4}

{-1, -3, 8}

{-3, -4, -8}

{-1, -2, 3, 4, -6}

Unit clause
(BCP)



...

{3, 6, -7, 8} Another unit clause

{1, 4, 7}

{-8, 4}

{-1, -3, 8}

{-3, -4, -8}

{-1, -2, 3, 4, -6}

clause
(more BCP)



{3, 6, -7, 8}

{1, 4, 7}

{-8, 4}

{-1, -3, 8}

{-3, -4, -8}

{-1, -2, 3, 4, -6}

CONFLICT!
(backtrack)



어떤 변수 먼저 찍어볼까?

- 짧은 clause부터
 - 금방 확정되게
- 자주 나오는 변수부터
 - 많은 clause에 영향
- 까다로운 변수부터
 - 충돌을 많이 일으키는
- 기타 등등

{a, b', c, d', e}
vs
{a, c'}

{a, b, c', d, e'}
{a, b}
{a, d'}
{a, e, f'}
...

내가 헛 짚었을 때는 누가 나를 뒤로 돌려보내주지?

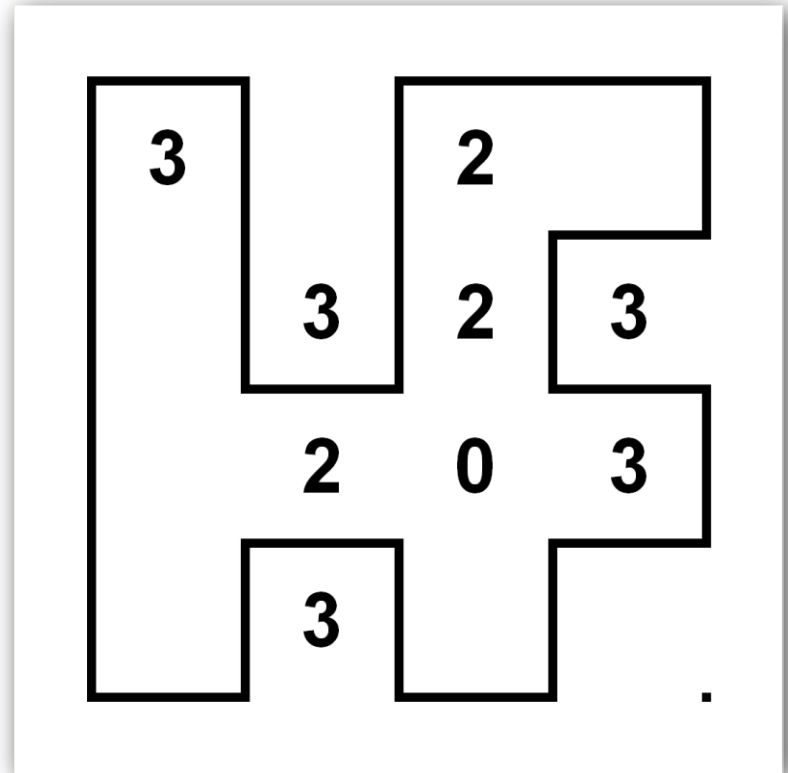
- 재귀로?
 - 마지막에 정했던 변수 뒤집기
 - 구현은 단순, 성능은 별로
- 충돌 분석?
 - 그 동안의 충돌들의 정보로 다음 탐색 결정
 - 예를 들면
 - $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ 에서 충돌하면
 - (x', y', z') 을 조건에 추가

어디다 쓰나요?

- 조건에 관한 모든 문제
- SAT로 인코딩 할 수 있는 모든 문제
 - 사실상 계산 가능한 모든 문제?
- 일단 가벼운 퍼즐로 몸 풀기!

Slither Link

- 규칙
 - 숫자는 주위 선분 수
 - 지뢰찾기와 비슷한
 - 결과는 폐곡선 한 개로



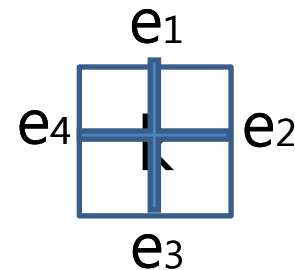
인코딩

- 숫자는 주위의 선분 수
 - 주위 네 선분을 변수로
 - $CARD(e_1, e_2, e_3, e_4) = k$

- 결과는 하나의 폐곡선으로
 - 한 칸에선 분기점이 없으면 OK
 - 해 전체를 표현하기는 어려움
 - 될 때까지 iteration
 - $CARD(e_1, e_2, e_3, e_4) = 0$ or 2

Example. $k = 1$:

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\},$
 $\{\neg e_1, \neg e_2\}, \{\neg e_1, \neg e_3\}, \{\neg e_1, \neg e_4\},$
 $\{\neg e_2, \neg e_3\}, \{\neg e_2, \neg e_4\}, \{\neg e_3, \neg e_4\}$

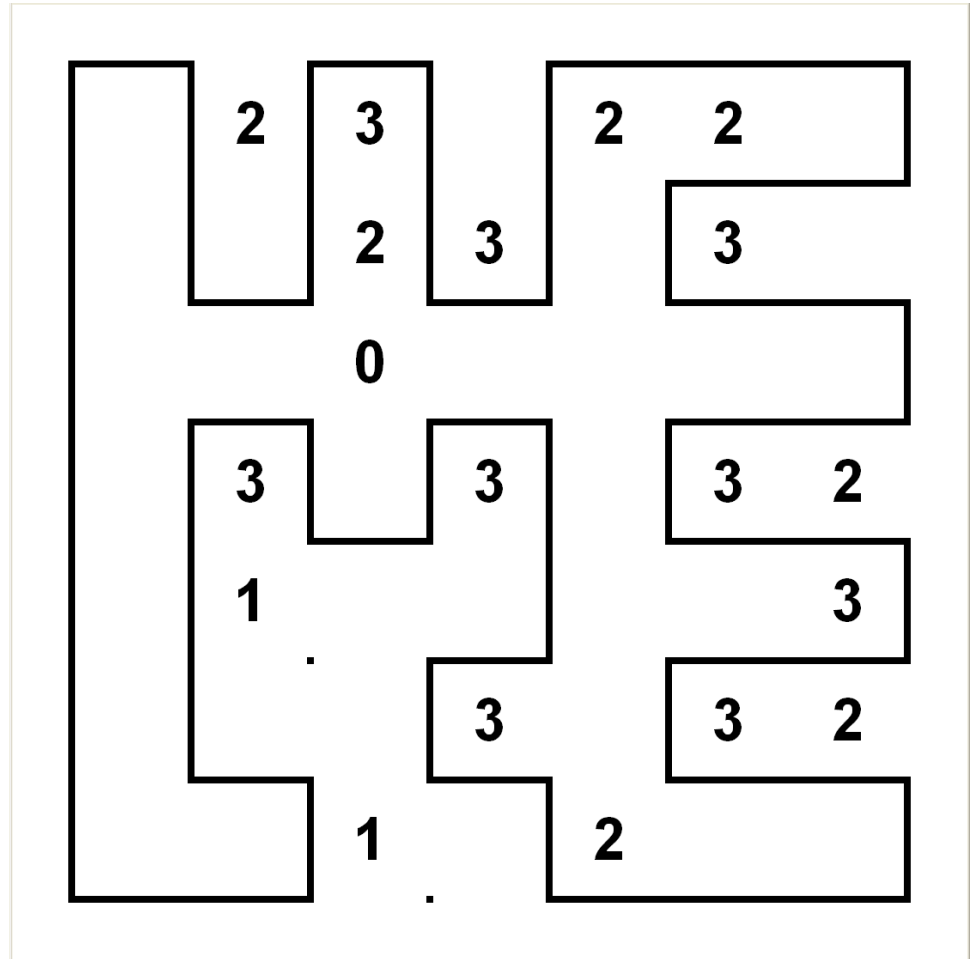


Local loop constraint.

$\{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3\}, \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_4\},$
 $\{\neg e_1, \neg e_3, \neg e_4\}, \{\neg e_2, \neg e_3, \neg e_4\},$
 $\{e_1, e_2, e_3, \neg e_4\}, \{e_1, e_2, \neg e_3, e_4\},$
 $\{e_1, \neg e_2, e_3, e_4\}, \{\neg e_1, e_2, e_3, e_4\}$

예시

- 이걸 풀면?
- 네 덩어리. 오답!
– 제약 추가
- 이것도 아니죠?
- 이것도 아니고.
- 이번엔 정답!



큰 예시

- 이런 것도.
 - 7회 반복
 - 28.0 ms

```
[leen@turbantad] ~/c/Loopy> r 30x20.lop -fast
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
| | | | 13 | 1 2 | 13 13 | 13 12 | 1 | 2 13 | 13 | 13 13 | |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
12 2 1 2 | 12 12 12 1 2 | 13 | 13 12 1 | 1 13 11 | |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
1 2 2 12 2 | 2 12 12 | | 13 1 | 1 | 12 1 | 12 3 | 13 |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
2 13 11 3 11 | | 2 | 11 3 | | 2 11 | | | 1 | |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
| 1 12 | 1 | 12 13 0 2 | 12 | 12 | 13 2 12 | 1 | 13 13 | |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
3 | | 13 | 12 | 12 2 | 12 | | 12 | 12 1 | | 1 2 | |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
| | 3 12 | | 12 2 | 2 | 12 | 11 2 | 12 2 | | | |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
| | 2 | 13 | 12 | 12 1 | 1 13 2 12 1 | 13 | 11 2 0 2 | |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
| 1 | 2 2 13 13 12 | | | | 2 | 13 | 3 12 | 1 12 | 13 12 |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
3 | 13 | 1 0 12 12 12 2 | 12 | 12 13 13 12 | 2 12 | |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
| 2 3 | | 3 | 11 11 2 | 3 12 12 | 11 13 | 12 |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
2 | | 2 | | 13 13 12 | 1 12 13 | 13 12 | 12 1 | 1 | |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
13 13 12 12 2 | 1 2 | 13 1 | 12 1 2 | 13 1 1 2 | | 12 | |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
| 2 1 13 13 | | 13 | 3 | | 13 11 2 | 2 | | 2 | 13 |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
2 3 | | 12 12 | 1 | 12 | 13 1 | | | | 12 | 12 | 1 2 |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
13 1 | 2 | 12 2 12 | 13 12 11 3 | 3 | 12 13 | 12 12 12 | 2 2 2 | 2 |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
| 12 | 11 | 2 | | 13 11 2 | 12 | | 2 1 1 | 2 | |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
13 | 13 | | 1 | 1 13 | 2 | | 12 13 1 | | | 13 | | 1 | |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
| | 3 11 3 | 2 2 | 12 12 | 12 2 | 13 11 2 1 | 13 11 3 | 12 |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
0 | 12 1 | 2 12 | 13 | 13 | | | 12 2 | 2 | | |
+--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+ +--+
Iterations: 7
CPU time: 28.0 ms
[leen@turbantad] ~/c/Loopy> █
```

연구에 활용은?

- 다음 발표에서...
- 조성근 - SAT 솔버 알고리즘
- 이우석 - SMT 솔버 알고리즘
- 이승중 - 여러 연구에 활용 사례

참조

- "Introduction to Satisfiability Solving with Practical Applications", Niklas Een, University of California, Berkeley, USA