Lagrangian Multiplier 방법을 이용한 제약 조건하에서의 서브모듈러 함수 최소화

Yongsub Lim (KAIST)

Kyomin Jung (KAIST)

Pushmeet Kohli (Microsoft Research)

개요

- 서브모듈러 이차 함수

$$H(\mathrm{x}) = \sum_{v \in V} \phi_v(x_v) + \sum_{(u,v) \in E} \phi_{uv}(x_u, x_v), \qquad \mathrm{x} \in \{0,1\}^V$$

- H가 서브모듈러하려면,

$$\phi_{uv}(0,0) + \phi_{uv}(1,1) \leq \phi_{uv}(0,1) + \phi_{uv}(1,0), \qquad \forall(u,v) \in E$$

- 서브모듈러 이차 함수는 효율적으로 최소화 가능
  - 예) 최소 비용 절단면 (min-cut) 알고리즘

문제 설명

$$H(\mathrm{x}) = \sum_{v \in V} \phi_v(x_v) + \sum_{(u,v) \in E} \phi_{uv}(x_u, x_v), \qquad \mathrm{x} \in \{0,1\}^V$$

- 목표는 제약조건을 만족하면서 H 최소화

$$\min \{H(\mathrm{x}) \ : F_1(\mathrm{x}) = k_1, \ F_2(\mathrm{x}) = k_2\}$$

- 제약조건 예)

$$F_1(\mathrm{x}) = \sum_{v \in V} x_v$$

$$F_2(\mathrm{x}) = \sum_{(u,v) \in E} |x_u - x_v|$$

문제 설명

$$H(\mathrm{x}) = \sum_{v\in V} \phi_v(x_v) + \sum_{(u,v)\in E} \phi_{uv}(x_u, x_v)\,, \qquad \mathrm{x} \in \{0,1\}^V$$

- 목표는 제약조건을 만족하면서 [illegible] 최소화

$$\mathrm{mi}\ [illegible] = k_1,\ F_2(\mathrm{x}) = k_2\}$$

일반적으로 NP-hard

- 제약조건 예)

$$F_1(\mathrm{x}) = \sum_{v\in V} x_v$$

$$F_2(\mathrm{x}) = \sum_{(u,v)\in E} |x_u - x_v|$$

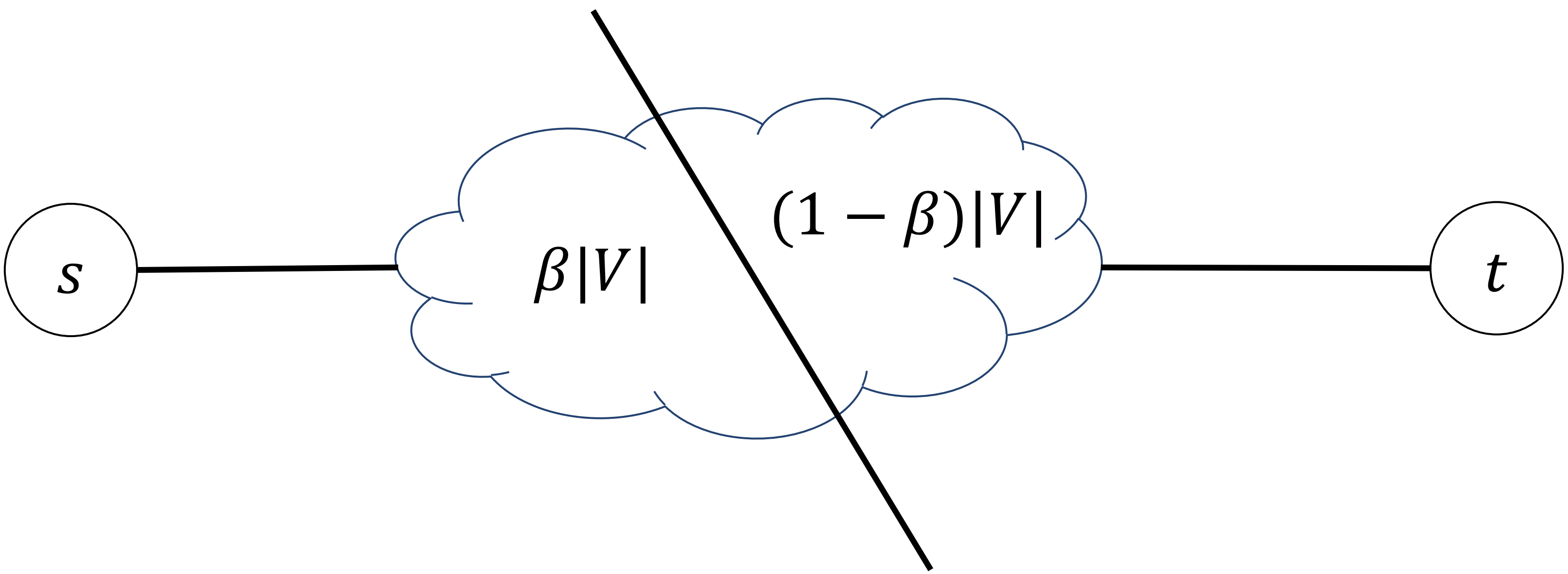
균형잡힌 최소 비용 절단면 문제에 적용

$$G = (V, E)$$

균형잡힌 최소 비용 절단면 문제에 적용

$$G = (V, E)$$

주어진 $0 < \beta < 1$에 대해

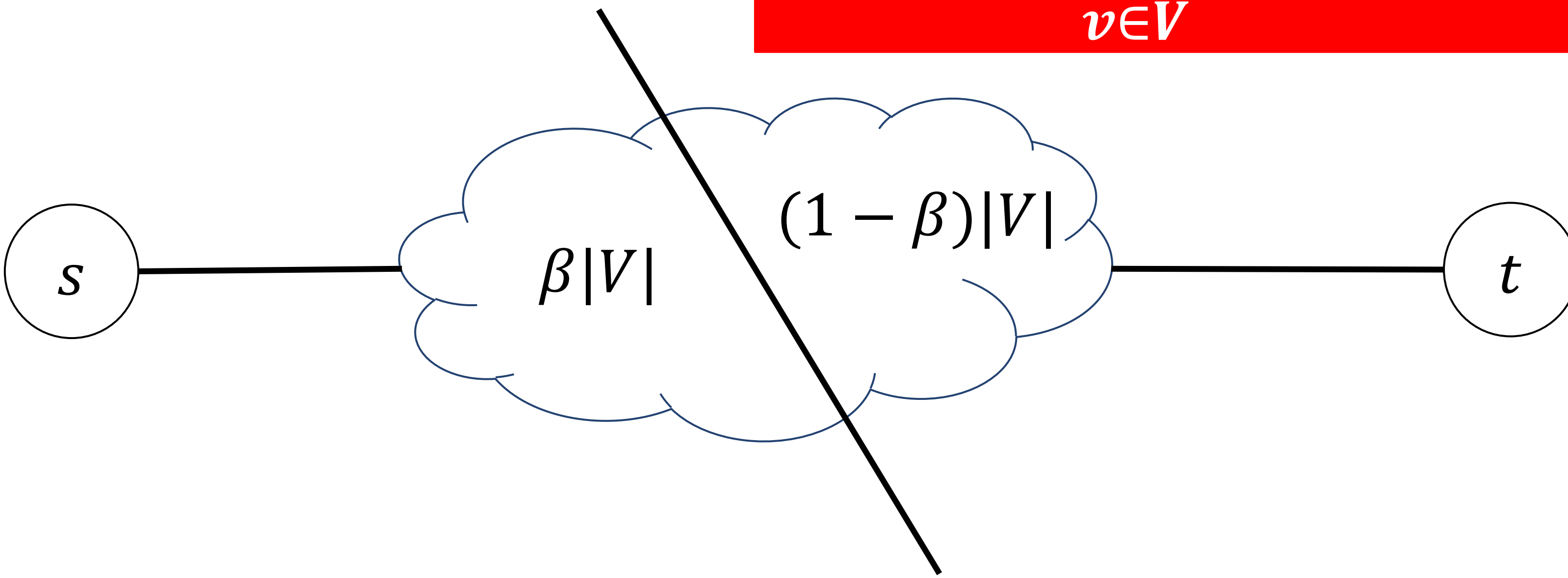


균형잡힌 최소 비용 절단면 문제에 적용

$$G = (V, E)$$

주어진 $0 < \beta < 1$에 대해

$$\boldsymbol{F_1(x) = \sum_{v \in V} x_v = \beta|V|}$$



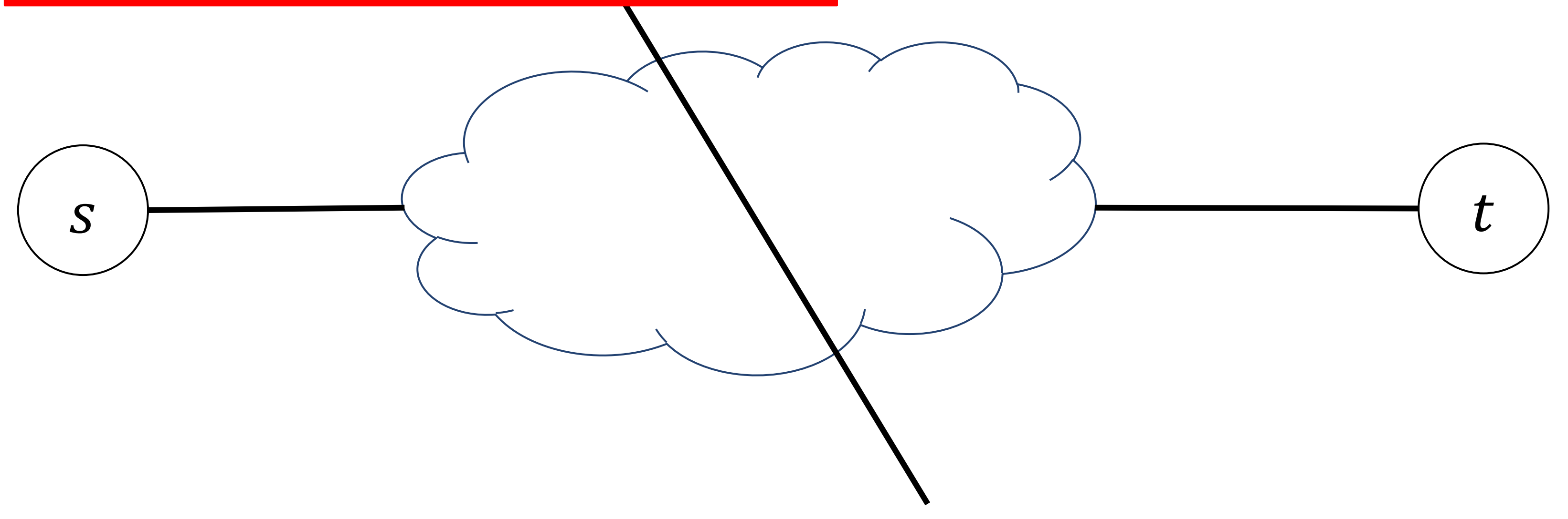
균형잡힌 최소 비용 절단면 문제에 적용

$$G = (V, E)$$

$$F_1(\mathrm{x}) = \sum_{v \in V_1} x_v = k_1$$

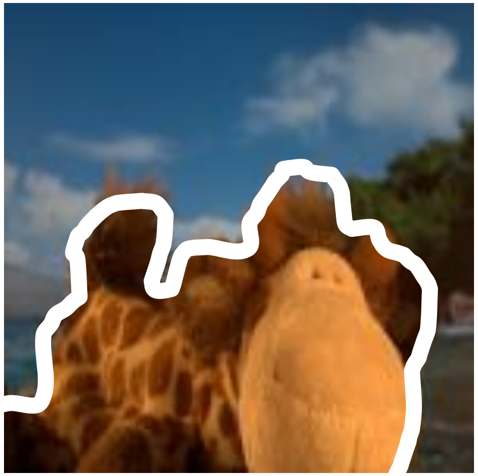
$$F_2(\mathrm{x}) = \sum_{v \in V_2} x_v = k_2$$

$$V_1, V_2 \subset V$$



이미지 분할 문제에 적용

이미지 분할 문제에 적용



이미지 분할 문제에 적용

$$H(\mathrm{x}) = \sum_{v \in V} \phi_v(x_v) + \sum_{(u,v) \in E} \phi_{uv}(x_u, x_v), \qquad \mathrm{x} \in \{0,1\}^V$$

이미지 분할 문제에 적용

$$H(\mathrm{x}) = \sum_{v \in V} \phi_v(x_v) + \sum_{(u,v) \in E} \phi_{uv}(x_u, x_v), \qquad \mathrm{x} \in \{0,1\}^V$$

$F_1(\mathrm{x})$ = 부피(물체) $= \sum_{v \in V} x_v = k_1$

$F_2(\mathrm{x})$ = 둘레(물체) $= \sum_{(u,v) \in E} |x_u - x_v| = k_2$

Lagrangian Multipliers를 이용한 접근

$$\min \{H(\mathrm{x}) \ : F_1(\mathrm{x}) = k_1,\ F_2(\mathrm{x}) = k_2\},$$

- Lagrangian multipliers를 이용해 표현

$$H^{\lambda}(\mathrm{x}) = H(\mathrm{x}) + \lambda_1 F_1(\mathrm{x}) + \lambda_2 F_2(\mathrm{x})$$

- x^*가 고정된 $\lambda \in \mathbb{R}^2$에 대해 H^{λ}를 최소화 한다고 하면, 다음을 만족한다

$$H(\mathrm{x}^*) = \min\ \{H(\mathrm{x}) :\ F_1(\mathrm{x}) = F_1(\mathrm{x}^*),\ \ F_2(\mathrm{x}) = F_2(\mathrm{x}^*)\}$$

- 다시 말해, x^*는 $[k_1 = F_1(\mathrm{x}^*),\ k_2 = F_2(\mathrm{x}^*)]$ 제약 조건 값에 대해 H를 최소화한다

제안하는 알고리즘

$$H^{\lambda}(\mathrm{x}) = H(\mathrm{x}) + \lambda_1 F_1(\mathrm{x}) + \lambda_2 F_2(\mathrm{x})$$

- 주어진 영역 $B \subset \mathbb{R}^2$ 내의 모든 λ에 대해 H^{λ}를 최소화하는 해를 구함
  - B내의 λ에 대해서, H^{λ}는 서브모듈러해야 함
- H^{λ}를 최소화하는 오라클 가정
- 알고리즘은 오라클이 어떤 λ들에 대해 불려질지를 결정

결과

- 알고리즘은 모든 $\lambda \in B$에 대해 H^{λ}를 최소화하는 해들을 계산된 해들의 선형적인 횟수의 오라클 호출만을 이용해서 구함

- 제약조건이 $F_1(\mathrm{x}) = \sum_{v \in V} x_v$, and $F_2(\mathrm{x}) = \sum_{(u,v) \in E} |x_u - x_v|$라면 알고리즘은 다항시간 안에 실행됨

실험 결과

Each is 120 × 120 grid graph

	Parametric MAP		
	# ver.	# sol.	time
IM1	527337	593952	121m 4s
IM2	362098	400204	96m 4s
IM3	221159	241436	76m 21s
IM4	164133	192055	56m 22s
IM5	507329	578472	127m 9s
IM6	473444	547838	128m 45s

더 나아가...

- 주어진 제약조건 값 (k_1, k_2)에 대해 H를 최소화 하는 해 $\hat{\mathrm{x}}$를 빠르게 근사적으로 구할 수 있다
  - $F_1(\hat{\mathrm{x}}) \cong k_1$ and $F_2(\hat{\mathrm{x}}) \cong k_2$

- 진행 중인 연구 및 향후 계획
  - 일반화
    - 일반적인 형태의 많은 제약 조건
    - 부등식 제약 조건
    - 다중 라벨 $(\mathrm{x} \in \{1, \ldots, k\}^V)$
  - 적용 가능한 다양한 문제 및 의미 있는 제약조건 찾기