빠른 3x3 행렬 곱셈 방법

행렬 곱셈의 복잡도

- 기본적인 알고리즘: $O(n^3)$
- 슈트라센 알고리즘: $O(n^{2.807\cdots})$
- 코퍼스미스-위노그라드: $O(n^{2.323\cdots})$

기본적인 2×2 행렬 곱셈

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= A_1B_1 + A_2B_3 \\
C_2 &= A_1B_2 + A_2B_4 \\
C_3 &= A_3B_1 + A_4B_3 \\
C_4 &= A_3B_2 + A_4B_4
\end{aligned}$$

슈트라센 알고리즘

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A_1 + A_4)(B_1 + B_4) \\
M_2 &= (A_3 + A_4)B_1 \\
M_3 &= A_1(B_2 - B_4) \\
M_4 &= A_4(-B_1 + B_3) \\
M_5 &= (A_1 + A_2)B_4 \\
M_6 &= (-A_1 + A_3(B_1 + B_2) \\
M_7 &= (A_2 + A_4)(B_3 + B_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= M_1 + M_4 - M_5 + M_7 \\
C_2 &= M_3 + M_5 \\
C_3 &= M_2 + M_4 \\
C_4 &= M_1 - M_2 + M_3 + M_6
\end{aligned}$$

래더만 알고리즘

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A_1 + A_2 + A_3 - A_4 - A_5 - A_8 - A_9)B_5 \\
M_2 &= (A_1 - A_4)(-B_2 + B_5) \\
M_3 &= A_5(B_1 + B_2 + B_4 - B_5 - B_6 - B_7 + B_9) \\
M_4 &= (-A_1 + A_4 + A_5)(B_1 - B_2 + B_5) \\
M_5 &= (A_4 + A_5)(-B_1 + B_2) \\
M_6 &= A_1B_1 \\
M_7 &= (-A_1 + A_7 + A_8)(B_1 - B_3 + B_8) \\
M_8 &= (-A_1 + A_7)(B_3 - B_6) \\
M_9 &= (A_7 + A_8)(-B_1 + B_3) \\
M_{10} &= (A_1 + A_2 + A_3 - A_5 - A_6 - A_7 - A_8)B_6 \\
M_{11} &= A_8(-B_1 + B_3 + B_4 - B_5 - B_6 - B_7 + B_8) \\
M_{12} &= (-A_3 + A_8 + A_9)(B_5 + B_7 - B_8) \\
M_{13} &= (A_3 - A_9)(B_5 - B_8) \\
M_{14} &= A_3B_7 \\
M_{15} &= (A_8 + A_9)(-B_7 + B_8) \\
M16 &= (-A_3 + A_5 + A_8)(B_6 + B_7 - B_9) \\
M_{17} &= (A_3 - A_6)(B_6 - B_9) \\
M_{18} &= (A_5 + A_6)(-B_7 + B_9) \\
M_{19} &= A_2B_4 \\
M_{20} &= A_6B_8 \\
M_{21} &= A_4B_3 \\
M_{22} &= A_7B_2 \\
M_{23} &= A_9B_9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= M_6 + M_{14} + M_{19} \\
C_2 &= M_1 + M_4 + M_5 + M_6 + M_{12} - M_{14} + M_{15} \\
C_3 &= M_6 - M_7 - M_9 + M_{10} - M_{14} - M_{16} + M_{18} \\
C_4 &= M_2 + M_3 + M_4 - M_6 + M_{14} + M_{16} - M_{17} \\
C_5 &= M_2 + M_4 + M_5 + M_6 + M_{20} \\
C_6 &= M_{14} + M_{16} + M_{17} + M_{18} + M_{21} \\
C_7 &= M_6 + M_7 + M_8 - M_{11} + M_{12} + M_{13} + M_{14} \\
C_8 &= M_{12} + M_{13} + M_{14} + M_{15} + M_{22} \\
C_9 &= M_6 + M_7 + M_8 + M_9 - M_{23}
\end{aligned}$$

일반화된 행렬 곱셈 식

$$M_t = \left(\sum \alpha_{ij}^t A_{ij}\right)\left(\sum \beta_{kl}^t B_{kl}\right) C_{mn} = \sum_{t=1}^{T} \gamma_{mn}^t M_t$$

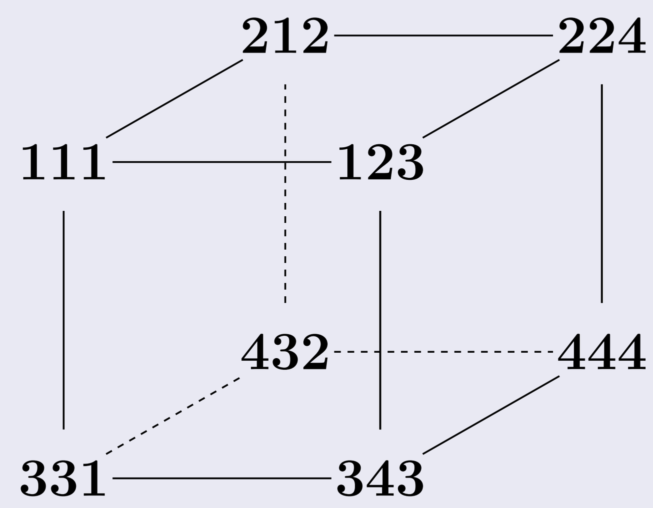
두 식을 합치면 다음과 같다:

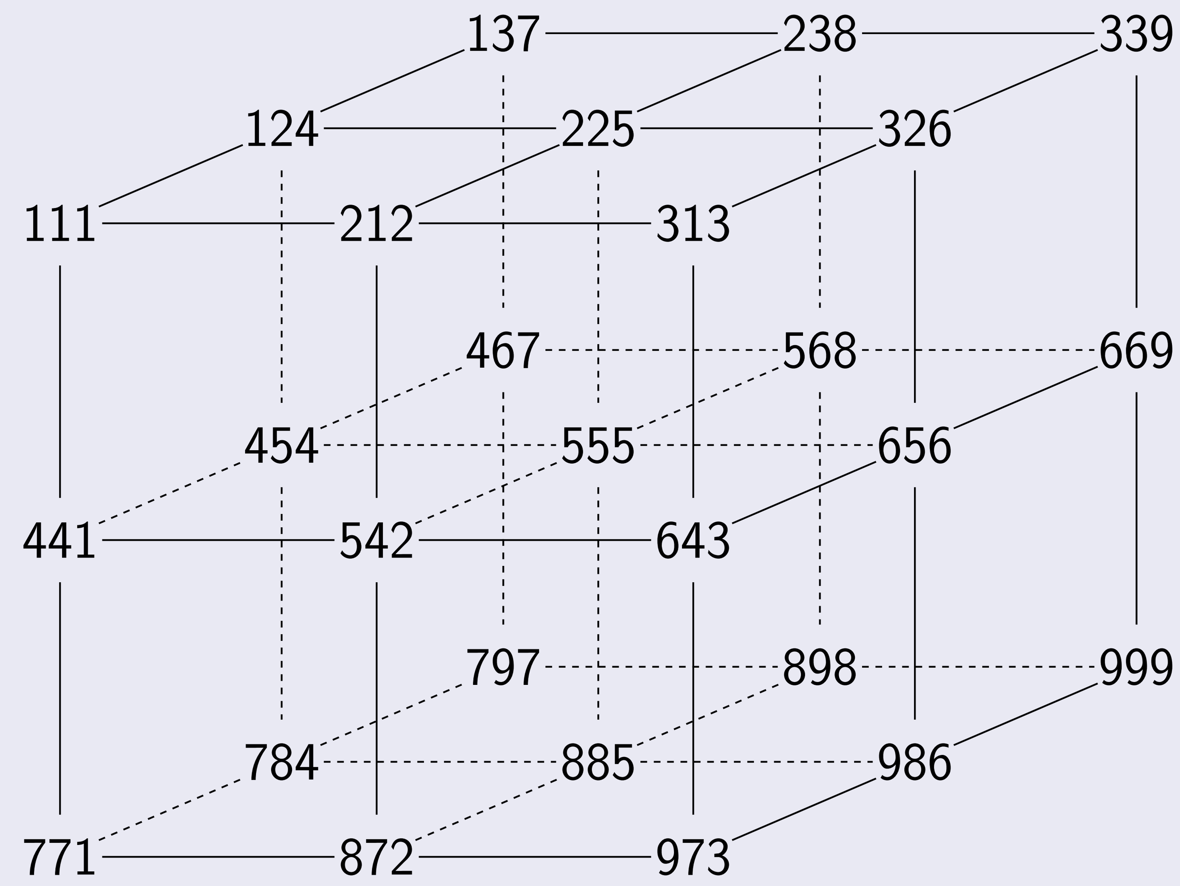
$$C_{mn} = \sum_{t,i,j,k,l} \gamma_{mn}^t \alpha_{ij}^t A_{ij} \beta_{kl}^t B_{kl}$$

이 식에서 γ, α, β의 첨자만 본다.

줄일 수 있는 집합

3×3 행렬 곱셈식은 2×2 행렬 곱셈 여러 개를 모아 만들 수 있고, 각각의 2×2 곱셈식이 곱셈 수를 하나씩 줄인다. (스트라센 알고리즘) 2×2 곱셈식 네 개로 이루어진 래더만 알고리즘은 곱셈 연산을 27개에서 23개로 줄이므로, 다섯 개를 조합할 수 있다면 22개로 줄일 수 있을 것이다.





진행상황

- 2×2 곱셈 집합 1: 111, 137, 212, 238, 441, 467, 542, 568
- 2×2 곱셈 집합 2: 124, 137, 326, 339, 454, 467, 656, 669
- 2×2 곱셈 집합 3: 124, 137, 225, 238, 784, 797, 885, 898
- 2×2 곱셈 집합 4: 111, 137, 313, 339, 771, 797, 973, 999

$$\begin{aligned}
M_1 &= (-A_1 + A_4 + A_6)(B_1 - B_2 + B_8) \\
M_2 &= (A_{11})(B_1) \\
M_3 &= (A_1 + A_2 + A_3 - A_4 - A_6 - A_8 - A_9)(B_8) \\
M_4 &= (A_6)(-B_1 + B_2 - B_4 + B_6 + B_7 - B_8 - B_9) \\
M_5 &= (A_4 + A_6)(-B_1 + B_2) \\
M_6 &= (-A_1 + A_4)(B_2 - B_8) \\
M_7 &= (-A_2 + A_5 + A_6)(B_4 - B_6 + B_9) \\
M_8 &= (A_2)(B_4) \\
M_9 &= (A_1 + A_2 + A_3 - A_5 - A_6 - A_7 - A_9)(B_9) \\
M_{10} &= (A_5 + A_6)(-B_4 + B_6) \\
M_{11} &= (-A_2 + A_5)(B_6 - B_9) \\
M_{12} &= (-A_2 + A_8 + A_9)(B_4 - B_5 + B_8) \\
M_{13} &= (A_9)(-B_1 + B_3 - B_4 + B_5 + B_7 - B_8 - B_9) \\
M_{14} &= (A_8 + A_9)(-B_4 + B_5) \\
M_{15} &= (-A_1 + A_8)(B_5 - B_8) \\
M_{16} &= (-A_1 + A_7 + A_9)(B_1 - B_3 + B_9) \\
M_{17} &= (A_7 + A_9)(-B_1 + B_3) \\
M_{18} &= (-A_1 + A_7)(B_3 - B_9) \\
M_{19} &= A_3B_7 \\
M_{20} &= A_5B_5 \\
M_{21} &= A_4B_3 \\
M_{22} &= A_7B_2 \\
M_{23} &= A_8B_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= M_2 + M_8 + M_{19} \\
C_2 &= M_1 + M_2 + M_3 + M_5 + M_8 + M_{12} + M_{14} \\
C_3 &= M_2 + M_7 + M_8 + M_9 + M_{10} + M_{16} + M_{17} \\
C_4 &= M_1 + M_2 + M_4 + M_6 + M_7 + M_8 - M_{11} \\
C_5 &= M_1 + M_2 + M_5 + M_6 + M_{20} \\
C_6 &= M_7 + M_8 + M_{10} + M_{11} + M_{21} \\
C_7 &= M_2 + M_8 + M_{12} + M_{13} + M_{15} + M_{16} + M_{18} \\
C_8 &= M_8 + M_{13} + M_{14} + M_{15} + M_{22} \\
C_9 &= M_2 + M_{16} + M_{17} + M_{18} + M_{23}
\end{aligned}$$

집합 네 개를 합쳐서 래더만 알고리즘과 같이 곱셈 연산 23개를 쓰는 다른 해를 찾아냈다. 다섯 개를 합쳐서 22개를 쓰는 해를 찾는 중이다.